Franz Gustav Kollmann: *Transkription und Kommentare zu den von Musil im "Register"-Heft notierten Formeln. Kommentar zu Musils Formeln für Tangenten und Normalen*. Akademie der Wissenschaften und der Literatur | Mainz (Hrsg.), 2017.
URN: urn:nbn:de:0238-musil-formeln-8-tangenten_4.

8 Kommentar zu Musils Formeln für Tangenten und Normalen

Franz Gustav Kollmann
München

8.1 Einleitung

In diesem sehr kurzen Abschnitt werden Formeln für die Berechnung von Tangenten und Normalen an ebenen Kurven angegeben. Eine ebene Kurve liegt vollständig in einer Ebene. Eine Ebene ist ein zweidimensionaler Raum R^2. Allgemein können in der Mathematik *n*-dimensionale Räume R^n eingeführt werden. Sofern die Dimension $n=3$ ist, handelt es sich um den uns Menschen vertrauten dreidimensionalen Raum R^3. Eine Kurve, die sich in einem Teilgebiet des dreidimensionalen Raumes befindet, heißt räumliche Kurve, wenn sich das Teilgebiet des Raumes R^3 nicht auf eine Ebene beschränken lässt. Räume R^n mit $n>3$ lassen sich anschaulich nicht vorstellen.

Für die Ebene, in der die ebene Kurve liegt, wird ein kartesisches x-y-Koordinatensystem eingeführt. Jeder Punkt in der x-y-Ebene wird durch ein Tupel (x,y) eindeutig festgelegt, wobei x und y reelle Zahlen sind. Eine ebene Kurve besteht aus einer kontinuierlichen Menge von dicht liegenden Punkten in dieser Ebene. Es gibt die folgenden Möglichkeiten der Darstellung einer Kurve in der x-y-Ebene:

8.1.1 Explizite Darstellung einer Kurve:

Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion der unabhängigen Variablen x. Dann wird die Kurve definiert durch

$$y=f(x) \qquad \text{(TNA-1)}$$

Ein Beispiel für eine explizit dargestellte Kurve ist

$$y=\sin x$$

Diese Kurve wird als Sinuskurve bezeichnet.

8.1.2 Implizite Darstellung einer Kurve:

Bei der impliziten Darstellung ist ein funktionaler Zusammenhang $F(x,y)$ zwischen den Koordinaten x und y gegeben.

$$F(x,y)=0 \tag{TNA-2}$$

Eine einfache, implizit definierte Kurve ist der Kreis mit Radius 1 um den Ursprung des x-y-Koordinatensystems. Der Ursprung ist durch das Tupel $(0,0)$ ausgezeichnet. Er ist der Schnittpunkt der x-Achse und der y-Achse. Der Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1 heißt *Einheitskreis*. Die implizite Darstellung des Einheitskreises lautet

$$x^2+y^2-1=0 \tag{2}$$

8.1.3 Parameterdarstellung einer Kurve:

Bei der Parameterdarstellung ist entweder ein abgeschlossenes Intervall[1] $[t_u,t_o]$ oder das Kontinuum $(-\infty,\infty)$ vorgegeben. Der Parameter t durchläuft das Intervall bzw. das Kontinuum. Bei dem abgeschlossenen Intervall gilt $t_u \le t \le t_o$ Die Parameterdarstellung lautet

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \tag{TNA-3}$$

wobei $x(t)$ und $y(t)$ stetige Funktionen des Parameters t sind.

Die Parameterdarstellung (TNA-3) zeigt sehr gut, dass eine Kurve ein eindimensionales Gebilde ist. Die Parameterdarstellung des Einheitskreises lautet für das Intervall $[0,2\pi]$

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} \tag{3}$$

Es lässt sich sehr einfach zeigen, dass die Parameterdarstellung (3) des Einheitskreises mit seiner impliziten Darstellung (2) identisch ist. Denn aus (3) folgt durch Quadrieren und Addieren

[1] Ein Intervall heißt abgeschlossen, wenn die Eckwerte t_u und t_o des Intervalls zu diesem gehören.

$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

was mit (2) identisch ist.

Grundsätzlich lassen sich alle drei angegebenen Darstellungen ebener Kurven in einander überführen. Dies kann allerdings auf erhebliche technische Schwierigkeiten stoßen.

8.1.5 Tangente:

Auf einer ebenen Kurve sei ein Punkt *P* mit den Koordinaten (ξ,η) gegeben. Es werde die explizite Darstellung der Kurve nach (TNA-1) betrachtet. Dann ist die Steigung *m* der Kurve im Punkt *P* durch die Ableitung

$$m = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\xi} \qquad \text{(TNA-4)}$$

definiert. Der vertikale Strich mit dem Index $x = \xi$ bedeutet, dass die Ableitung an der Stelle $x = \xi$ zu berechnen ist. Die Tangente an den Punkt *P* der Kurve ist eine Gerade deren Steigung[2] mit der im Punkt *P* nach (TNA-6) berechneten Steigung der Kurve in *P* übereinstimmt.

1.6 Normale:

Die Normale im Punkt *P* der Kurve steht senkrecht auf der Tangente.

2. Musils Formeln

Alle von Musil notierten Formeln finden sich in »*Bronstein*«, S.234, Tabelle 3.26. Um von den dort angegebenen Formeln auf die von Musil zu kommen, müssen lediglich die Setzungen nach Tabelle 1 vorgenommen werden:

Tabelle 1 Koordinaten des betrachteten Kurvenpunktes

Bronstein	*Musil*
X	ξ
Y	η
$x = x(t)$	$x = \varphi(t)$
$y = y(t)$	$y = \psi(t)$

[2] Eine Gerade ist dadurch ausgezeichnet, dass sie in allen Punkten die gleiche, konstante Steigung aufweist.

Hierin sind in Musils Notation ξ und η die Koordinaten desjenigen Punktes *P* auf der Kurve, in dem die Tangente bzw. Normale berechnet werden. Wenn der Parameter *t* die Werte des Intervalls $\left[t_{\mathrm{u}}, t_{\mathrm{o}}\right]$ bzw. $(-\infty, \infty)$ durchläuft, repräsentiert das Tupel (ξ, η) alle Punkte der Kurve.

In den folgenden Formeln repräsentieren die Tupel (x, y) alle Punkte der Tangente bzw. Normalen an die gegebene Kurve im Punkt P mit den Koordinaten (ξ, η).

Formeln (TN-1) und (TN-2):

Behauptung:

Voraussetzung:

$$y = f(x)$$

Die folgenden Formeln gelten daher für die explizite Darstellung der Kurve nach (TAN-1).

Berechnung der Tangente:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \qquad \text{(TN-1)}$$

Berechnung der Normalen:

$$\eta - y = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}(\xi - x) \qquad \text{(TN-2)}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, s. 234, Tabelle 3.26, zweite Zeile.

Formeln (TN-3) und (TN-4):

Behauptung:

Voraussetzung:

$$F(x, y) = 0$$

Die folgenden Formeln gelten daher für die implizite Darstellung der Kurve nach (TAN 2).

Berechnung der Tangente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0 \qquad \text{(TN-3)}$$

Berechnung der Normalen:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0 \qquad \text{(TN-4)}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 234, Tabelle 3.26, erste Zeile.

Die bei »*Bronstein*« stehende Formel

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Ist – wie leicht einzusehen – äquivalent mit (TN-3).

Formeln (TN-5) und (TN-6)

Behauptung:

Voraussetzung:

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t)$$

Berechnung der Tangente:

$$\varphi'(t)(\eta - y) - \psi'(\xi - x) = 0 \qquad \text{(TN-5)}$$

Berechnung der Normalen:

$$\psi'(t)(\eta - y) + \varphi'(t)(\xi - x) = 0 \qquad \text{(TN-6)}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 234, Tabelle 3.26, dritte Zeile.