Franz Gustav Kollmann: *Transkription und Kommentare zu den von Musil im "Register"-Heft notierten Formeln. Kommentar zu den von Musil notierten Formeln für Differenzialquotienten*. Akademie der Wissenschaften und der Literatur | Mainz (Hrsg.), 2017.
URN: urn:nbn:de:0238-musil-formeln-7-differentialquotienten_8.

7. Kommentar zu den von Musil notierten Formeln für Differenzialquotienten

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. F. G. Kollmann
München

7.1 Grundlagen

7.1.1 Begriff der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ einer Variablen x kann je nach Wahl mit den Symbolen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y', $f'(x)$ oder $Df(x)$ gekennzeichnet werden, wobei Musil auch die Bezeichnung $df(x)$ verwendet.

Es sei $f(x)$ eine Funktion der unabhängigen Variablen x. Ferner sei Δx ein inkrementeller Zuwachs der Variablen x. Infolge des Inkrements Δx nimmt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x den Wert $f(x+\Delta x)$ an. Der Zuwachs des Funktionswertes infolge des Zuwachses Δx beträgt $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$. Die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x ist definiert als »*Bronstein*«, S. 394, (6.1)

$$f'(x) = \frac{df}{dx} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{(DA-1)}$$

Die Funktion $y = f(x)$ kann geometrisch in einem ebenen $x-y-$Koordinatensystem als ebene Kurve gedeutet werden [vgl. hierzu »*Bronstein*«, S. 394, Abb. 6.1]. Die Ableitung lässt sich als Steigung dieser Kurve im Punkt (x,y) interpretieren. Wenn eine Funktion $y = f(x)$ im Punkt (x,y) eine endliche Ableitung besitzt, heißt sie dort differenzierbar. Beispielsweise existiert für die Funktion $y = x\sin(1/x)$ an der Stelle $x = 0$ der Grenzwert nach Gl. (DA-1) nicht und sie ist daher an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

Der Prozess des Berechnens (oder Bildens) der Ableitung heißt *Differenzieren*. Ableitungen werden auch als *Differenzialquotienten* bezeichnet. Diese Bezeichnung verwendet Musil.

7.1.2 Differenziale und vollständige Differenziale

Sofern nur eine unabhängige Variable x vorliegt, kann deren Differenzial $dx = \Delta x$ eingeführt werden, wobei Δx ein beliebiger Wert zugeordnet werden kann (vgl. »*Bronstein*«, S. 409). Es sei $f(x)$ eine bekannte, mindestens einmal differenzierbare Funktion der unabhängigen Variablen x und $f'(x)$ deren Ableitung. Dann ist das *Differenzial* df dieser Funktion wie folgt definiert

$$df = f'(x)dx \tag{DA-2}$$

Musil verwendet für die Kennzeichnung des Differenzials den Buchstaben d [vgl. hierzu die Formelgruppen (D-25) mit (D-33)]. In den Formeln (D-40) mit (D-57) bezeichnet der Ausdruck $D^n f(x)$ dagegen die n-te Ableitung der Funktion $f(x)$, was an sich nicht üblich ist. In moderner Schreibweise bedeutet

$$D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}(dx)^n = \frac{d^n f(x)}{dx^n}dx^n,$$

wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist, das Differenzial von der Ordnung n. Obwohl dieser Unterschied der Bedeutungen der Ausdrücke $df(x)$ (Differenzial erster Ordnung) und $D^n f(x)$ (Ableitung n-ter Ordnung) bei Musil vom Standpunkt einer einheitlichen Notation eher unschön ist, werden diese Unterschiede im Kommentar beibehalten, um sich so eng wie möglich an das Original von Musil zu halten.

Als nächstes soll die Bildung der Ableitungen von Funktionen mit n unabhängigen Variablen nach einer dieser Unbekannten angegeben werden. Es sei $u = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)$ gegeben. Die Ableitung der Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)$ nach einer der unabhängigen Variablen x_i heißt <u>*partielle Ableitung nach der unabhängigen Variablen*</u> x_i .Sie wird mit dem Symbol $\partial u / \partial x_i$ bezeichnet. Die partielle Ableitung nach der Variablen x_i ist gegeben durch »*Bronstein*«, S.408, (6.35)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_i + \Delta x_i, \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)}{\Delta x_i} \tag{DA-3}$$

Bei der Berechnung der partiellen Ableitung nach der Variablen x_i werden also alle anderen $n-1$ Variablen als Konstanten behandelt. Von einer Funktion mit n Variablen können daher n partielle Ableitungen berechnet werden.

Die Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n)$ ist nach »*Bronstein*«, S. 410 in dem Punkt $P_0(x_{10,} x_{20,} \ldots x_{i0}, \ldots x_{n0})$ differenzierbar, wenn sich ihr vollständiger Zuwachs

$$\Delta u = f(x_{10} + dx_1, x_{20} + dx_2, \ldots x_{i0} + dx_i, \ldots x_{n0} + dx_n) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{i0}, \ldots x_{n0})$$

beim Übergang zu einem benachbarten Punk $P(x_{10} + dx_1, x_{20} + dx_2, \ldots x_{i0} + dx_i, \ldots x_{n0} + dx_n)$ mit den beliebig kleinen Größen $dx_1, dx_2, \ldots dx_i, \ldots dx_n$ sich von der Summe der partiellen Differenziale

$$\left(\frac{df}{dx_1}dx_1 + \frac{df}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{df}{dx_i}dx_i + \ldots \frac{df}{dx_n}dx_n \right)_{x_{10}, x_{20}, \ldots x_{i0}, \ldots x_{n0}}$$

um eine Größe höherer Ordnung unterscheidet, die wesentlich kleiner ist als der Abstand $\overline{PP}_0 = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots dx_i^2 + \ldots dx_n^2}$. Eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit ist die Existenz aller partiellen Ableitungen. Sie ist jedoch nicht hinreichend für die Differenzierbarkeit.

Für eine differenzierbare Funktion kann das <u>*vollständige Differenzial*</u> gebildet werden »*Bronstein*«, S.410, (6.42a)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n \qquad \text{(DA-4)}$$

7.1.3 Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Das Verfahren wird bei »*Bronstein*«, S. 5 geschildert. Es gilt für Sätze oder Formeln, die von natürlichen Zahlen n abhängen. Es soll eine Aussage für eine beliebige Zahl n bewiesen werden. Dann wird beim Verfahren der vollständigen Induktion angenommen, dass diese Aussage für n gültig ist. In einem nächsten Schritt wird gezeigt, dass die Gültigkeit der Aussage für die Zahl $n+1$ aus der Gültigkeit der Aussage für die Zahl n gefolgert werden kann. Schließlich muss noch gezeigt werden, dass die Aussage für eine natürliche Zahl $n_0 < n$ gilt. Meistens wird $n_0 = 1$ gewählt. Das Verfahren der vollständigen Induktion besteht also aus den folgenden Schritten:

1. Formulierung der Induktionsannahme für n, wobei vorausgesetzt wird, dass diese Annahme wahr ist.
2. Beweis der Wahrheit der Aussage beim Übergang von n auf $n+1$.
3. Verifikation der Aussage aus der Induktionsannahme für n_0.

Die beiden Schritte nach 1. und 2. lassen sich auch als Induktionsschritt von n nach $n+1$ zusammenfassen. Wegen der Beliebigkeit der natürlichen Zahl n kann der Induktionsschritt auch von $n-1$ nach n durchgeführt werden.

1.4 Grundregeln für das Differenzieren

Für das Differenzieren gibt es folgende Grundregeln »*Bronstein*«, S. 395ff.

<u>Konstantenregel:</u> »*Bronstein*«, S.395, (6.4)

Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl[1]. Dann gilt für $y = f(x) = c$

---

[1] Die Zeichenkette $c \in \mathbb{R}$ bedeutet, dass die Größe c ein Element der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist. Eine exakte Definition der reellen Zahlen ist schwierig [vgl. hierzu z. B. Mainzer, K: *Reelle Zahlen.* Kapitel 2 (Paragraph 2 zu Dedekindschen Schnitten) in: Heinz-Dieter Ebbinghaus u. a.: *Zahlen.*, Springer Verlag 1983, S. 30 f]. Eine mehr anschauliche Erläuterung geht von einer Hierarchie der Zahlen aus. Allgemein bekannt sind die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw. Ihre Gesamtheit wird als Menge $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\infty\}$ der natürlichen Zahlen bezeichnet. Die erste Erweiterung führt durch die Operation der Subtraktion (z. B. $5-7=-2$) auf die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{-\infty\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\infty\}$. Es ist deutlich zu erkennen, dass die natürlichen Zahlen in den ganzen enthalten sind. In mengentheoretischer Sprechweise sind

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} = c' = 0 \tag{DA-5}$$

<u>Faktorregel:</u> »*Bronstein*«, S.395, (6.5)

$$\frac{d\left[cf(x)\right]}{dx} = c\frac{df(x)}{dx} \tag{DA-6}$$

Ein konstanter Faktor c kann beim Differenzieren vor die Ableitung gezogen werden.

Im folgenden seien $u(x), v(x)$ und $w(x)$ Funktionen der unabhängigen Variablen x, die differenzierbar sind.

<u>Summenregel:</u> »*Bronstein*«, S.395, (6.6a)

Für die Ableitung der Summe $y = u + v + w$ gilt

$$y' = u' + v' + w' \tag{DA-7}$$

Die Ableitung der Summe von mehreren Funktionen ist gleich der Summe von deren Ableitungen. Das gleiche gilt für Differenzen mehrerer Funktionen. Für den Spezialfall $w \equiv 0$ (das Zeichen $\equiv$ bedeutet „identisch“) gilt

$$y' = u' + v' \tag{DA-7a}$$

<u>Produktregel:</u> »*Bronstein*«, S.396, (6.7a) und S. 397 (6.7c)

Für die Ableitung des Produktes zweier differenzierbarer Funktionen gilt

$$y' = (uv)' = u'v + uv' \tag{DA-8}$$

Es seien n differenzierbare Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ gegeben. Dann gilt für die Ableitung ihres Produktes

---

die natürlichen Zahlen eine Untermenge der ganzen Zahlen. Eine weitere Erweiterung ergibt sich aus der Operation des Dividierens. So ist der Bruch 2/3 keine ganze Zahl sondern eine rationale. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen umfasst neben den ganzen Zahlen die echten Brüche, bei denen Zähler und Nenner teilerfremd sind. Die Operation des Wurzelziehens führt auf eine Erweiterung des Zahlbegriffes. Es gibt Wurzeln, die ihrerseits ganze Zahlen oder rationale Zahlen sind. Beispiele sind $\sqrt{4} = \pm 2$ oder $\sqrt{9/25} = \pm 3/5$. Für das erste Beispiel ergeben sich zwei ganze, für das zweite zwei rationale Zahl, weil sowohl das Quadrat einer positiven wie einer negativen reellen Zahl α die gleiche positive reelle Zahl β ergeben [$\alpha^2 = \beta$ bzw. $(-\alpha)^2 = \beta$]. Jedoch kann die Operation des Wurzelziehens auf Lösungen führen, die weder natürliche noch positive rationale Zahlen sind. Ein Beispiel dafür ist $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$. Eine derartige Zahl heißt irrational. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen umfasst alle natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen.

$$\left(u_1 u_2 \ldots u_n\right)' = \sum_{i=1}^{n} u_1 u_2 \cdots u_i' \cdots u_n \qquad \text{(DA-8a)}$$

Quotientenregel: »*Bronstein*«, S.397, (6.8)

Für die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen gilt unter der Voraussetzung $v \neq 0$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \text{(DA-9)}$$

Kettenregel: »*Bronstein*«, S.397, (6.9)

Es sei $y = v\left[u(x)\right]$ eine Funktion einer Funktion (Beispiel $y = \exp(\sin x)$). Dann gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \qquad \text{(DA-10)}$$

Anwendung der Kettenregel auf das obige Beispiel mit Anwendung von $(D\text{-}3)_1$ und $(D\text{-}1)_3$:

$$v(u) = \exp u \quad \mathrm{u}(x) = \sin x \quad \frac{dv}{du} = \exp u = \exp(\sin x) \qquad \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = \exp(\sin x)\cos x$$

Ableitungen einfacher Funktionen: »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

Fall 1: $y = x^n \;\; n \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \text{(DA-11)}$$

Sonderfälle:

$n = 1$

$$\frac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{(DA-11a)}$$

$n = -m \quad m > 0$

$$\frac{dx^{-m}}{dx} = -mx^{m-1} \qquad \text{(DA-11b)}$$

$$n = \frac{1}{2} \qquad y = \sqrt{x}$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{dx^{1/2}}{dx} = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \tag{DA-11c}$$

<u>Fall 2:</u> $y = \exp x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\exp x}{dx} = \exp x \tag{DA-12}$$

Sonderfälle: $y = \exp(bx) \quad b \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\exp(bx)}{dx} = b\exp(bx) \qquad \text{(DA-12a}$$

$$y = a^x = \exp(x\ln a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \exp(x\ln a)\ln a = a^x \ln a \tag{DA-12b}$$

<u>Fall 3:</u> $y = \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \tag{DA-13}$$

Sonderfall: $y = \lg_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \quad a \in \mathbb{R} \quad a > 0 \quad a \neq 1 \quad x > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln a} \tag{DA-13a}$$

<u>Fall 4:</u> $y = \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \tag{DA-14}$$

<u>Fall 5:</u> $y = \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \tag{DA-15}$$

Fall 6: $y = \tan x \quad$ für $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ k = 1,2,\ldots$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{DA-16}$$

Fall 7: $y = \cot x \quad$ für $x \neq k\pi\ k = 1,2,\ldots$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{DA-17}$$

7.2 Formeln von Musil

Zunächst ist zu bemerken, dass Musil die Produktregel (D-6) und die Quotientenregel (D-7) nicht an den Anfang seiner Betrachtungen stellt. In systematischer Hinsicht ist es vorteilhaft, diese häufig gebrauchten Regeln zuerst anzugeben. Die Produktregel (D-6) stimmt mit (DA-8) und die Quotientenregel (D-7) mit (DA-9) überein (s. die dort angegebenen Verweise auf »*Bronstein*«).

Formel (D-1)$_1$

Behauptung:

$$y = x^{\alpha} \qquad \frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Nachweis: Formel (D-1)$_1$ ist für $\alpha = n$ identisch mit (DA-11)

Formel (D-1)$_2$

Behauptung:

$$y = \sin x \qquad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

Nachweis: Formel (D-1)$_2$ ist identisch mit (DA-14)

Formel (D-2)$_1$

Behauptung:

$$y = b^x \qquad \frac{dy}{dx} = b^x \ln b$$

Nachweis: Formel (D-2)$_1$ ist identisch mit (DA-12b), wenn dort $a = b$ gesetzt wird.

Formel (D-2)$_2$

Behauptung:

$$y = \cos x \qquad \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

Nachweis: Formel (D-2)$_2$ ist identisch mit (DA-15)

Formel (D-3)$_1$

Behauptung:

$$y = \exp x \qquad \frac{dy}{dx} = \exp x$$

Nachweis: Formel (D-3)$_1$ ist identisch mit (DA-12)

Bemerkung zu den Formeln (D-3)$_2$ und (D-4)$_2$:

In diesen beiden Formeln werden die Ableitungen der Hyperbel-Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ angegeben. Sie sind wie folgt definiert [vgl. »*Bronstein*«, S. 134, Formeln (3.13a) und (3.13b)]:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left[\exp x - \exp(-x)\right] \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\left[\exp x + \exp(-x)\right]$$

Musil hat in (D3-2)$_2$ nur die Definition für die Funktion $\cosh x$ angegeben.

Formel (D-3)$_2$:

Behauptung:

$$y = \cosh x \qquad \frac{dy}{dx} = \sinh x$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

Bemerkung zu den Formeln (D-4)$_1$ und (D-5)

Die Logarithmen $\ln x$ (natürlicher Logarithmus) und $\log_b x$ werden in Abschnitt 6.2 des Kommentars zu „Grenzwerten“ behandelt.

Formel (D-4)$_1$

Behauptung:

$$y = \log_b x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\log_b e}{x} = \frac{1}{x \ln b}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 mit $a = b > 0$ Formel (D-4)$_1$ identisch mit (DA-13a), wenn $b = a$ gesetzt wird. Der Vermerk $b > 0$ und die zweite Formel für die Ableitung fehlen bei Musil.

Formel (D-4)$_2$

Behauptung:

$$y = \sinh x \qquad \frac{dy}{dx} = \cosh x$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1

Formel (D-5)

Behauptung:

$$y = \ln x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Nachweis: Formel (D-5) ist identisch mit (DA-13).

Formel (D-6):

Behauptung:

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 396, Formel (6.7a) bzw. (DA-8)

Formel (D-7):

Behauptung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

Analyse:

Diese Formel stimmt nicht, den du und dv sind keine Differentialquotienten sondern Differenziale. Nach »*Bronstein*«, S. 397, Formel (6.8) lautet sie richtig

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Bei »*Bronstein*« findet hierfür sich eine kompaktere Fassung. Dazu wird die Differenziation einer abhängigen Variablen (z. B. *y*) nach einer unabhängigen Variablen (z.

B. x) durch einen Apostroph (z. B. y') gekennzeichnet. In dieser kompakten Schreibweise lautet (D-7)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Bemerkung:

Wenn die rechte Seite der von Musil angegebenen Formel als korrekt angesehen wird, stehen dort Differenziale. Daher muss auch auf der linken Seite ein Differenzial stehen. Die Formel (D-7) lautet für Differenziale

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

Vermutlich handelt es sich bei Musil um einen Übertragungsfehler.

Formel (D-8):

Behauptung:

$$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x$$

Nachweis:

Zunächst gilt mit (TH-5) und (TH-1)

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{1}$$

Gl. (1) s. »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 für $x \neq (2k+1)\pi / 2 \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Formel (D-9):

Behauptung:

$$\frac{d \cot x}{dx} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$$

Nachweis:

Mit (TH-6) und (TH-1) folgt

$$-1 - \cot^2 x = -1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{1}$$

Gl. (1) s. »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 für $x \neq k\pi \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Formel (D-10):

Behauptung:

$$\frac{d \sec x}{dx} = \tan x \sec x$$

Beweis:

Nach »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 gilt

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$$

Dabei wurden für die Umformungen die Formeln »*Bronstein*«, S. 78, (2.70) und S.80, (2.88) benützt.

Formel (D-11):

Bemerkung:

Auf der linken Seite findet sich im Original Musils zwischen der Funktionsbezeichnung cosec und deren Argument x ein Malpunkt $\{\cdot\}$, der an dieser Stelle unzulässig ist.

Behauptung:

$$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\cot x \operatorname{cosec} x$$

Beweis:

Aus »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

$$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Umformung mit »*Bronstein*«, S. 78, (2.71) und S.80, (2.89) liefert

$$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \operatorname{cosec} x$$

Formel (D-12):

Behauptung:

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 mit der Einschränkung $|x| < 1$

Formel (D-13):

Behauptung:

$$\frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 mit der Einschränkung $|x| < 1$

Formel (D-14):

Behauptung:

$$\frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Nachweis:»*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

Formel (D-15):

Behauptung:

$$\frac{d\,\mathrm{arccot}\, x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1

Formel (D-16):

Behauptung

$$\frac{d\,\mathrm{arcsec}\, x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Beweis:

Die Funktion $arc\sec x$ ist in zwei Bereichen definiert, nämlich $-\infty \le x < -1$ und $1 \le x < \infty$. Die von Musil angegebene Formel findet sich bei »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1. Jedoch gilt sie nur für $x > 1$, was weder von Musil noch von »*Bronstein*«

angegeben wird. Bei E. Weisstein: http://mathworld.wolfram.com/InverseSecant.html, aufgerufen am 21.11.2016, 16:48 findet sich die unzureichende Einschränkung[2] $x > 0$. Die Einschränkung $x > 1$ reicht nicht aus, da $x < -1$ ebenfalls ein zulässiger Bereich der Domäne der Funktion $\operatorname{arcsec} x$ ist. Bei Sloughter[3] findet sich folgende Formel für die Ableitung der Funktion $arc\sec x$.

$$\frac{d \operatorname{arcsec} x}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \qquad -1 < x \quad 1 < x \tag{1}$$

Den folgenden Beweis von (1) gibt Sloughter an.

Wenn $y = \operatorname{arcsec} x$ ist, dann gilt

$$x = \sec y \tag{2}$$

Die Funktion $\operatorname{arcsec} x$ weist die Hauptwerte[4] $0 \le y < \pi / 2$ oder $\pi / 2 < y \le \pi$ auf.

Durch Differenzieren von (1) nach x folgt mit Hilfe der Kettenregel (DA-10)

$$1 = \frac{d \sec y}{dy}\frac{dy}{dx} = \sec y \tan y \frac{dy}{dx} \tag{3}$$

Für die zweite Umformung wurde Gl. (D-10) benützt. Aus Gl. (2) ergibt sich für die gesuchte Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} \tag{4}$$

Weiter folgt mit Gl. (T-2)$_2$ die Identität

$$1 + \tan^2 y = \sec^2 y$$

oder

$$\begin{aligned} \tan^2 y &= \sec^2 y - 1 = x^2 - 1 \\ \tan y &= \pm\sqrt{x^2 - 1} \end{aligned} \tag{5}$$

Für $1 \le x < \infty$ gilt $0 \le y < \pi / 2$ und daher $\tan y \ge 0$. Daher muss $\sec y \tan y = x\sqrt{x^2 - 1}$ gewählt werden. Entsprechend gilt für $-\infty < x \le -1$, dass $\pi / 2 < y \le \pi$ wird und daher $\tan y \le 0$ Damit wird $\sec y \tan y = -x\sqrt{x^2 - 1}$. Da x

---

[2] Richtig gestellt muss diese Einschränkung $1 < x$ lauten.
[3] Sloughter, Dan, Difference Equations to Differential Equations,Section 6.5 Inverse Trigonometric Functions. http://synechism.org/drupal/de2de, aufgerufen 21.11.2016
[4] Zur Definition des Hauptwertes der zyklometrischen Funktion »*Bronstein*«, S. 85f.

negativ ist, wird der Ausdruck $\sec y \tan y > 0$ also positiv. Damit ist bestätigt, dass unabhängig vom Vorzeichen von x Gl. (1) gilt.

Formel (D-17):

Behauptung:

$$\frac{d \operatorname{arccosec} x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1.

Bemerkung:

In E. Weisstein http://mathworld.wolfram.com/InverseCosecant.html, aufgerufen 21.11.2016, 16:57 findet sich die unrichtige Einschränkung $x > 0$, die sowohl bei Musil als auch bei »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 fehlt. Die zu Gl. (D-16) angestellten Überlegungen zeigen, dass für Formel (D-17) die Präzisierung

$$\frac{d \operatorname{arcosec} x}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$$

gilt.

Formel (D-18)

Behauptung:

$$\frac{d \arcsin \varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}$$

Beweis:

Formel (D-18) folgt aus der Kettenregel (DA-10) und (D-12)

$$\frac{d \arcsin \varphi(x)}{dx} = \frac{d \arcsin \varphi(x)}{d\varphi(x)} \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}} \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

Formel (D-19)

Behauptung:

$$\frac{d \arccos \varphi(x)}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}$$

Beweis:

Analog zum Beweis von (D-18) folgt (D-19) aus (D-13) und der Kettenregel (DA-10).

Formel (D-20)

Behauptung:

$$\frac{d \arctan \varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}$$

Beweis:

Analog zum Beweis von (D-18) folgt (D-20) aus (D-14) und der Kettenregel (DA-10)

Formel (D-21)

Bemerkung:

Musil schreibt

$$\frac{d \operatorname{arccot} \cdot \varphi(x)}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{1+\left(\varphi(x)\right)^2}$$

Hierin ist der Malpunkt zwischen der Funktion arccot und deren Argument $\varphi(x)$ nicht richtig. Ferner ist im Nenner der rechten Seite die Schreibweise mit zwei in einander geschachtelten runden Klammern nicht besonders übersichtlich. Vorzuziehen ist die Schreibweise in der Behauptung, in der das überflüssige zweite Klammernpaar weggelassen wurde.

Behauptung:

$$\frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}$$

Beweis:

Analog zum Beweis von (D-18) folgt (D-21) aus (D-15) und der Kettenregel (DA-10).

Formel (D-22)

Behauptung:

$$\frac{d \operatorname{arcsec} \varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\sqrt{\varphi^2(x)-1}}$$

Beweis:

Analog zum Beweis von (D-18) folgt (D-22) aus (D-16) und der Kettenregel (DA-10).

Formel (D23)

Behauptung:

$$\frac{d\,\mathrm{arccosec}\,\varphi(x)}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\sqrt{\varphi^2(x)-1}}$$

Beweis:

Analog zum Beweis von (D-18) folgt (D-23) aus (D-17) und der Kettenregel (DA-10).

Bemerkung zu dem Formeln (D-22) und (D-23):

Wie bei den Formeln (D-16) und (D-17) angemerkt wird, müssen die Formeln (D-22) und (D-23) exakt wie folgt lauten

$$\frac{d\,\mathrm{arcsec}\,\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{|\varphi(x)|\sqrt{\varphi(x)^2-1}} \qquad |\varphi(x)|>1$$

bzw.

$$\frac{d\,\mathrm{arcosec}\,x}{dx} = -\frac{1}{|\varphi(x)|}\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)^2-1}} \qquad |\varphi(x)|>1$$

Formel (D-24):

Bemerkung:

Diese Formel wird von Musil unter der Bezeichnung „Logarithmische Funktion“ eingeführt. Für den Logarithmus wählt Musil hier ausnahmsweise die Bezeichnung „lg“. Diese Bezeichnung ist laut »*Bronstein*«, S.8, (1.21) für den dekadischen Logarithmus vorgesehen. Für den natürlichen Logarithmus $\ln x$ verwendet Musil sonst ein geschwungenes *l* [vgl. $(G\text{-}16)_1$, (D-5), $(D\text{-}25)_1$ (D-28), (D-29), $(D\text{-}31)_1$ und (D-33)], vgl. hierzu Abschnitt 6.2 „Logarithmen“ im Kommentar zu den Formel für Grenzwerte. Die Schreibweise lg für den natürlichen Logarithmus ist daher in Formel (D-24) inkonsistent.

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\lg\varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Beweis:

Die Behauptung gilt nur für den natürlichen Logarithmus. (D-24) muss daher richtig lauten

$$\frac{d}{dx}\ln\varphi(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Formel (D-24) folgt aus Formel (D-5) und der Kettenregel (DA-10)

$$\frac{d\ln\varphi(x)}{dx}=\frac{d\ln\varphi(x)}{d\varphi(x)}\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Bemerkung zu Musils Eintrag „Funct. von Funct“ nach (D-24):

Als nächstes führt Musil nach (D-24) unter der Bezeichnung „Funktion von Funktion“ die Kettenregel (DA-10) an, die in seiner Schreibweise die folgende Form (DA-10a) annimmt.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \qquad \text{(DA-10a)}$$

Allerdings gibt Musil die Voraussetzung $z=z\left[y(x)\right]$ nicht an [vgl. hierzu die Voraussetzung zu (DA-10)]. Die Formel (DA-10a) wird im Folgenden verwendet.

Vorbemerkung zu den Formeln (D-25) mit (D-33):

In (D-24) behandelt Musil die Kettenregel für Differenzialquotienten (die auch Ableitungen heißen). In den o. g. Formeln werden Differenziale von Funktionen behandelt (vgl. dazu Abschnitt 7.1.2 dieses Kommentars).

Formel (D-25)$_1$:

Behauptung:

$$d\left[\frac{1}{b}\ln(a+bx)\right]=\frac{dx}{a+bx}$$

Beweis:

Setzte $z=\ln y \quad y:=a+bx$ und wende die Kettenregel (DA-10), Gl. (D-5) und die Konstantenregel (DA-5). Damit gilt

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{1}{z}b=\frac{1}{a+bx},$$

wobei im zweiten Schritt die Rücksubstitution $z=a+bx$ durchgeführt wurde.

Formel (D-25)$_2$:

Behauptung:

$$d\left[\frac{2\sqrt{a+bx}}{b}\right]=\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$$

Beweis:

Setze $z=\sqrt{y}\quad y=a+bx$ und wende die Kettenregel (DA-10), die Konstantenregel (DA-2) und (DA-11c) an. Damit gilt

$$\frac{dz}{dx}=2\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{2}{b}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}b=\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$$

Formel (D-26)$_1$:

Behauptung:

$$d\left[-\frac{1}{b(a+bx)}\right]=\frac{dx}{(a+bx)^2}$$

Beweis:

Setze $y:=a+bx$. Wende die Kettenregel (DA-10), Gl. (DA-11b) mit $m=-1$ sowie die Konstantenregel (DA-5) und die Faktorregel (DA-6) an.

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{b}\left[\frac{-1}{(a+bx)^2}\right]b=\frac{1}{(a+bx)^2}$$

Hierbei wurde die Rücksubstitution gedanklich sofort vorgenommen. Sie wird in den folgenden Beweisen in der gleichen Art unterdrückt.

Formel D-26)$_2$:

Behauptung:

$$d\left[\frac{\ln\left(\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)}{\beta}\right]=\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$$

Bemerkung:

Die linke Seite der Behauptung lässt sich etwas kompakter schreiben, wenn $\beta^2x^2=(\beta x)^2$ berücksichtigt wird. Die Behauptung lautet dann

$$d\left[\frac{\ln\left(\beta x+\sqrt{\alpha^2+(\beta x)^2}\right)}{\beta}\right]=\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$$

Beweis:

Für den Ausdruck in der eckigen Klammer auf der linken Seite der Behauptung wird eine Funktion $A(x)$ wie folgt eingeführt

$$A(x):=\left[\frac{\ln\left(\beta x+\sqrt{\alpha^2+(\beta x)^2}\right)}{\beta}\right] \tag{1}$$

Anstelle des Differenzials dA wird die Ableitung $dA/dx=dA(x)/dx=A'(x)$ berechnet. Aus ihr ergibt sich das Differenzial zu $dA=A'(x)dx$, vgl. hierzu (DA-2). Für die weitere Berechnung werden die folgenden Setzungen vorgenommen

$$A:=\frac{\ln[u(x)]}{\beta} \qquad u(x):=\beta x+\sqrt{\alpha^2+(\beta x)^2} \tag{2}$$

Dann gilt nach der Kettenregel (DA-10)

$$\frac{dA}{dx}=\frac{1}{\beta}\frac{d\ln u}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{\beta}\frac{1}{u}\frac{du}{dx} \tag{3}$$

Als nächstes werden die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite von (3) berechnet.

Unter Beachtung von (DA-13) folgt aus (2)

$$\frac{1}{\beta u}=\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta x+\sqrt{\alpha^2+(\beta x)^2}} \tag{4}$$

Aus $(2)_2$ ergibt sich mit (DA-11c) und (DA-11) für $n=2$

$$\frac{du(x)}{dx}=\beta+\frac{\beta^2x}{\sqrt{\alpha^2+(\beta x)^2}}=\beta\left(\frac{\beta x+\sqrt{\alpha^2+(\beta x)^2}}{\sqrt{\alpha^2+(\beta x)^2}}\right) \tag{5}$$

Einsetzen von (4) und (5) in (3) ergibt die Behauptung.

Formel (D-27)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\alpha\beta}\arctan\frac{\beta x}{\alpha}\right)}{dx}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}$$

Beweis:

Setze $y:=\arctan\frac{\beta x}{\alpha}$. Wende die Kettenregel (DA-10), Gl. (D-8) und die Faktorregel (DA-6) an

$$\frac{d\left(\frac{1}{\alpha\beta}\arctan\frac{\beta x}{\alpha}\right)}{dx}=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{1+\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{1+\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2}=\frac{1}{\alpha^2+(\beta x)^2}$$

Formel (D-27)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\alpha\beta}\arcsin\frac{\beta x}{\alpha}\right)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$$

Beweis:

Setze $y:=1/\alpha\beta\arcsin(\beta x/\alpha)$. Wende die Kettenregel (DA-10), Gl. (D-12) und die Faktorregel (DA-6) an

$$\frac{d\left(\frac{1}{\alpha\beta}\arcsin\frac{\beta x}{\alpha}\right)}{dx}=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2}}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2}}=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-(\beta x)^2}}$$

Bemerkung: Bei Musil fehlt der Vorfaktor $1/\alpha$.Das korrekte Ergebnis stellt sich ein, wenn auf der linken Seite der Vorfaktor im Zähler von (D-27)$_2$ $1/\beta$ anstelle von $1/(\alpha\beta)$ lautet. Vermutlich handelt es sich um einen Flüchtigkeitsfehler.

Formel (D-28)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\ln\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)\right]=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2x^2}$$

Beweis:

Wende Kettenregel (DA-10), (DA-13) die Quotientenregel (DA9) und die Faktorregel (DA-6) an

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\alpha\beta}\ln\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)=\frac{1}{2\alpha\beta}\frac{1}{\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}}\frac{(\alpha-\beta x)\beta-(\alpha+\beta x)(-\beta)}{(\alpha-\beta x)^2}$$

$$=\frac{1}{2\alpha\beta}\frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta x)(\alpha-\beta x)}=\frac{1}{\alpha^2-(\beta x)^2}$$

Bei der letzten Umformung des Nenners wurde Gebrauch gemacht von Gl. (AH-2).

Formel (D-28)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}\right]=\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$$

Beweis:

Wende die Kettenregel (DA-10), Gl. (DA-11c) und die Faktorregel (DA-6) an

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}\right]=\frac{1}{b}\frac{2bx}{2\sqrt{a+bx^2}}=\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$$

Formel (D-29):

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2b}\ln\left(a+bx^2\right)\right]=\frac{x}{a+bx^2}$$

Beweis:

Wende die Kettenregel (DA-10), Gl. (DA-11) mit $n = 2$ und die Faktorregel (DA-6) an

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2b}\ln\left(a+bx^2\right)\right] = \frac{1}{2b}\frac{2bx}{a+bx^2} = \frac{x}{a+bx^2}$$

Formel (D-30)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}$$

Beweis:

Wende die Kettenregel (DA-10), die Quotientenregel (DA-9), Gl. (DA-11) mit $n = -1/2$, bzw. beim Nachdifferenzieren mit $n = 2$ und die Faktorregel (DA-6) an

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{1}{a}\frac{\sqrt{a+bx^2} - x\dfrac{1}{2\sqrt{a+bx^2}}2bx}{a+bx^2}$$

Erweitere auf der rechten Seite mit $\sqrt{a+bx^2}$. Damit wird

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{1}{a}\cdot\frac{a+bx^2-bx^2}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}$$

Formel (D-30)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{x}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}$$

Beweis:

Wende die Kettenregel (DA-10), Gl. (DA-11) mit $n = -1/2$, bzw. beim Nachdifferenzieren mit $n = 2$ und die Faktorregel (DA-6) an

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}\cdot 2bx = \frac{x}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}}$$

Formel (D-31)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d}{dx}\left(x\ln x - x\right) = \ln x$$

Beweis:

Wende die Produktregel (DA-8), (DA-13) und Summenregel (DA-7a) an

$$\frac{d}{dx}\left(x\ln x - x\right) = x\frac{1}{x} + \ln x - 1 = \ln x$$

Bemerkungen:

1. Bei Formel (D-31)$_1$ handelt es sich nicht um eine Anwendung der Kettenregel (DA10) oder in Musils Terminologie um eine „Function einer Function".
2. Musil hat notiert $d[x\ln x - x)$. Bei der eckigen Klammer [anstelle der richtigen runden) handelt es sich vermutlich um einen Schreibfehler.

Formel (D-31)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d}{du}\left(-\ln\cos u\right) = \tan u$$

Beweis:

Wende die Kettenregel (DA-10) und Gl. (DA-15) an

$$\frac{d}{du}\left[-\ln\cos u\right] = -\frac{1}{\cos u}\left(-\sin u\right) = \tan u$$

Formel (D-32)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{d}{du}\left[\ln\sin u\right] = \cot u$$

Beweis:
Wende die Kettenregel (DA-10) und Gl. (DA-14) an

$$\frac{d}{du}\left[\ln \sin u\right] = \frac{1}{\sin u}\cos u = \cot u$$

Formel (D-32)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\alpha\beta}\arctan\left(\frac{\beta \tan u}{\alpha}\right)\right] = \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u}$$

Beweis:

Hier ist die Kettenregel (DA-7) zweimal anzuwenden. Setze $v := 1/(\alpha\beta)\arctan y$ und $y := (\alpha/\beta)\tan u$ Dann führt die Kettenregel auf

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} \tag{1}$$

Gl. (1), »*Bronstein*«, S.396, Tabelle 6.1 (für die Ableitung der Funktion $\arctan x$) und Gl. (DA-17) ergeben mit der Faktorregel (DA-6)

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\alpha\beta}\arctan\left(\frac{\beta \tan u}{\alpha}\right)\right] &= \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\beta \tan u}{\alpha}\right)^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{\cos^2 u} \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\beta \tan u}{\alpha}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 u} = \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u}\end{aligned}$$

Formel (D-33):

Behauptung:

$$\frac{d}{du}\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\ln\left(\frac{\alpha + \beta \tan u}{\alpha - \beta \tan u}\right)\right] = \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 u - \beta^2 \sin^2 u}$$

Beweis:

Wie bei Formel (D-32)$_2$ ist die Kettenregel zweimal anzuwenden. Wende die Kettenregel (DA-10), die Quotientenregel (DA-9), die Faktorregel (DA-6) und die Summenregel (DA-7a) an

$$\frac{d}{du}\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\cdot\ln\left(\frac{\alpha+\beta\tan u}{\alpha-\beta\tan u}\right)\right]=\frac{1}{2\alpha\beta}\cdot\frac{1}{\frac{\alpha+\beta\tan u}{\alpha-\beta\tan u}}\cdot\frac{(\alpha-\beta\tan u)\frac{\beta}{\cos^2 u}-(\alpha+\beta\tan u)\left(-\frac{\beta}{\cos^2 u}\right)}{(\alpha-\beta\tan u)^2}$$

$$=\frac{1}{2\alpha\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta\tan u}{\alpha+\beta\tan u}\cdot\frac{\beta}{\cos^2 u}\frac{2\alpha}{(\alpha-\beta\tan u)^2}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot\frac{1}{(\alpha+\beta\tan u)(\alpha-\beta\tan u)}=\frac{1}{\cos^2 u}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2\tan^2 u}$$

$$=\frac{1}{\alpha^2\cos^2 u-\beta^2\sin^2 u}$$

Bei der letzten Umformung des Nenners wurde Gl. (AH-2) angewendet.

Formeln (D-34) und (D-35):

Diese beiden Formeln werden gemeinsam behandelt.

Behauptung:

$$z=f(x,y) \qquad dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad \text{(D-34)}$$

$$u=F(x,y,z) \qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad \text{(D-35)}$$

Bemerkung: Im Original von Musil fehlen in (D-35) in der Definition von u auf der linken Seite die Kommazeichen zwischen den unabhängigen Variablen x, y, und z. Sie sind üblich, um Verwechslungen mit dem Produkt xyz auszuschließen.

Nachweis: Spezialfälle von »*Bronstein*«, S. 410, (6.42a) für $n=2$ und $n=3$.

Bei Musil fehlen folgende Bedingungen für die Funktionen $f(x,y)$ bzw. $F(x,y,z)$:

Die Funktionen $f(x,y)$ bzw. $F(x,y,z)$ müssen differenzierbar sein (vgl. hierzu »*Bronstein*«, S. 410, Abschnitt 6.2.2.1.1). Wenn diese Bedingung erfüllt ist, heißt dz bzw. du vollständiges Differenzial (vgl. hierzu Abschnitt 7.1.2).

Formel (D-36)

Behauptung:

Es sei

$$y=f\left[u(x),v(x)\right]$$

Dann gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial v} v'$$

Nachweis:

(D-36) stellt lediglich eine etwas andere Schreibweise von (D-34) dar.

Formel (D-37)

Behauptung:

Es sei

$$y = f\left[u(z), v(z_1)\right] \quad \text{mit} \quad z = z(x) \quad z_1 = z_1(x)$$

Dann gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \text{mit} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dx}$$

Beweis:

Die Behauptung lässt sich einfacher und allgemeiner in der folgenden Form anschreiben. Es sei

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \quad \text{mit} \quad x_1 = x_1(\xi), x_2 = x_2(\xi), \ldots, x_n = x_n(\xi)$$

Dann ist nach »*Bronstein*«, S. 413, (6.51b)

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\xi} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\xi} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\xi} \tag{1}$$

Wird in (1) *y* mit *f* sowie die unabhängige Variable x mit ξ identifiziert und werden die Ausdrücke $x_1 = u\left[z(\xi)\right]$ und $x_2 = v\left[z_1(\xi)\right]$ gesetzt, so folgt mit $n = 2$ (D-37) aus (1).

Formel (D-38):

Behauptung:

Gegeben sei

$$F(x, y) = 0$$

In diesem Fall ist die Funktion $y = f(x)$ implizit gegeben. Daher schreibt Musil „Implicite Funktionen“. Die Ableitung der implizit gegebenen Funktion $f(x)$ wird berechnet nach

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 413, (6.53a) mit (6.53c). Dabei werden in »*Bronstein*« die Symbole $F_x : \partial F / \partial x$ und $F_y := \partial F / \partial y$ verwendet. In »*Bronstein*« wird vermerkt, dass (D-38) bzw. (6.53c) gilt, falls $F_y \neq 0$.

Formel(D-39):

Behauptung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Nachweis: »*Bronstein*«*,* S. 411, (6.45).

Vorbemerkung zu den Formeln (D-40) mit (D-57):

Wie bereits in Abschnitt 7.1.2 angegeben verwendet Musil für diese Formeln die Definitionen

$$Dy := \frac{dy}{dx} \qquad D^n y =: \frac{d^n y}{dx^n} \tag{1}$$

Die Größen D und D^n sind also Differenzialoperatoren erster und n-ter Ordnung, die auf die Funktion $y(x)$ einwirken. Sie dürfen daher nicht mit Differenzialen erster und n-ter Ordnung verwechselt werden.

Formel (D-40)₁

Zunächst gibt Musil folgende Definition

$$D(y) = \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

Da in (1) das Symbol *D* den Differenzialoperator repräsentiert, wird die Notation nach (1) in der Vorbemerkung verwendet. Dies gilt umso mehr, als Musil in den folgenden Formeln genau diese Schreibweise verwendet, die er unmittelbar unterhalb der Worte „Höhere Diff. Quot“ auf seiner pagina 10 einführt.

Behauptung:

$$Dx^{\mu} = \mu x^{\mu-1}$$

Nachweis: Dies stimmt vollkommen mit $(D1\text{-}1)_1$ bzw. mit (DA-11) überein.

Formel $(D\text{-}40)_2$:

Behauptung:

$$D^n x^{\mu} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots[\mu-(n-1)]\,x^{\mu-n}$$

Nachweis: »*Bronstein*«*,* S. 402, Tabelle 6.3.

Bemerkung:

Vorausgesetzt werden muss, dass $\mu \leq n$ ist. Für $\mu = n$ folgt aus $(D\text{-}40)_2$

$$D^n x^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Mit der Konstantenregel (DA-5) folgt daher

$$n > m: \qquad D^n x^m = 0$$

Formel (D-41):

Behauptung:

$$D^n (a + b\,x)^{\mu} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-[n-1])b^n (a+bx)^{\mu-n}$$

Beweis:

Setze *z:=a+bx* und wende für jeden Differentiationsschritt in (D-41) Formel $(D\text{-}40)_2$ und die Kettenregel (DA-10) an mit

$$\frac{dz}{dx} = b$$

Dann ergibt sich die Behauptung.

Formel (D-42):

Behauptung:

$$D^n \frac{1}{a+b\,x} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \ldots n \cdot b^n}{(a+b\,x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!\,b^n}{(a+b\,x)^{n+1}}$$

wobei die zweite, bei Musil fehlende Schreibweise kompakter ist.

Beweis:

Zunächst wird die Behauptung umgeschrieben

$$D^n\left(a+bx\right)^{-1}=\left(-1\right)^n n!b^n\left(a+bx\right)^{-n-1}$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion von n nach $n+1$ und n-maliges Anwenden der Kettenregel (DA-10). Dazu wird $z:=a+bx$ gesetzt. Es gilt

$$\frac{dz}{dx}=b \qquad (1)$$

Formulierung der Induktionsannahme für $n+1$:

$$D^{n+1}\left(a+bx\right)=\left(-1\right)^{n+1}\left(n+1\right)!b^{n+1}\left(a+bx\right)^{-n-2} \qquad (2)$$

Induktionsschritt von n nach $n+1$:

$$D^{n+1}\left(a+bx\right)^{-1}=D\left[D^n\left(a+bx\right)^{-1}\right]=D\left[\left(-1\right)^n\left(n\right)!b^n\left(a+bx\right)^{-n-1}\right]$$

Durch Anwenden von (DA-11) der Kettenregel (DA-10) ergibt sich

$$D\left[\left(-1\right)^n n!b^n\left(a+bx\right)^{-n-1}\right]=\left(-1\right)^n n!b^n\cdot\left(-n-1\right)\left(a+bx\right)^{-n-2}b=\left(-1\right)^{n+1}\left(n+1\right)!b^{n+1}\left(a+bx\right)^{-n-2}$$

Das stimmt genau mit der Induktionsbehauptung (2) überein.

Verifikation für $n_0=1$:

$$D\left(a+bx\right)^{-1}=-b\left(a+bx\right)^{-2}$$

Das ist das korrekte Ergebnis, das sich direkt aus (DA-11b) und der Kettenregel (DA-10) ergibt.

Formel (D-43):

Behauptung:

$$D^n\log x=M\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots(n-1)}{x^n}$$

Diese Formel lässt sich kompakter schreiben

$$D^n \log x = M \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Die Größe M bezeichnet Musil als „Modul[5] des logarithmischen Systems". Er wird von Musil nicht näher angegeben.

Nachweis:

Die Formel macht Sinn, wenn unter der Bezeichnung „log" der dekadische Logarithmus $\log_{10} x = \lg x$ verstanden wird. Es ist zweckmäßig, den dekadischen Logarithmus auf den natürlichen umzurechnen. Nach »*Bronstein*«, S. 9, (1.20) gilt mit $a = 10$ und $b = e$

$$M = \frac{1}{\ln 10} \tag{1}$$

Diese Größe M ist der von Musil nicht explizit angegebene „Modul des logarithmischen Systems".

Bei »*Bronstein*«, S. 402, Tabelle 6.3, 3. Zeile von oben findet sich die folgende Formel

$$D^n \log_a x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ln a} \frac{1}{x^n} \tag{2}$$

Wird in (2) $a = 10$ gesetzt und nach (1) $1/\ln 10 = M$ gesetzt, ergibt sich genau die Behauptung.

Formel (D-44):

Behauptung:

$$D^n \log(a + bx)n = M \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdot ... n - 1)b^n}{(a + bx)^n}$$

Diese Formel lässt sich wieder kompakter schreiben

$$D^n \log(a + bx) = M \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, b^n}{(a + bx)^n} \tag{1}$$

Dabei ergibt sich der Modul M aus (1) im Beweis zu (D-43).

[5] Zu diesem Modul vgl. Kapitel „Grenzwerte", Abschnitt 6.2 „Logarithmen" dieses Kommentars

Beweis:

Die Formel ergibt sich aus (D-43), wenn dort x ersetzt wird durch $z := a + bx$ und mit der Ableitung

$$\frac{dz}{dx} = b$$

die Kettenregel (DA-10) *n*-mal angewendet wird, was in (1) auf den Faktor b^n führt.

Formel (D-45):

Behauptung:

$$D^n a^x = (\ln a)^n a^x$$

Nachweis: »*Bronstein*«*,* S. 402, Tabelle 6.3, 5. Zeile von oben.

Formel (D-46):

Behauptung:

$$D^n \exp(\beta x) = \beta^n \exp(\beta x)$$

Nachweis: In »*Bronstein*«, S. 402, Tabelle 6.3, 4. Zeile von oben findet sich folgende Formel

$$D^n \exp(kx) = k^n \exp(kx)$$

Aus ihr folgt die Behauptung mit $k = \beta$.

Formel (D-47):

Behauptung:

$$D^n \sin x = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S.402, Tabelle 6.3, 7. Zeile von oben.

Formel (D-48):

Behauptung:

$$D^n \cos x = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 402, Tabelle 6.3, 8. Zeile von oben.

Formel (D-49):

Behauptung:

$$D^n(au+bv)=aD^nu+bD^nv$$

Die Größen *a* und *b* sind reelle Zahlen, die Größen *u* und *v* Funktionen der unabhängigen Variablen (z. B. *x*). Diese Funktionen müssen *n*-mal differenzierbar sein.

Beweis:

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.

Induktionsbehauptung für *n*-1:

$$D^{n-1}\left(au+bv\right)=aD^{n-1}u+bD^{n-1}v$$

Induktionsschritt von *n*-1 nach *n*:

$$D^n\left(au+bv\right)=D\left[D^{n-1}\left(au+bv\right)\right]=D\left(aD^{n-1}u+bD^{n-1}v\right)=aD^nu+bD^nv \qquad (1)$$

Damit ist die Behauptung formal wieder gewonnen.

Verifikation für n=1

$$D\left(au+bv\right)=Dau+Dbv=aDu+bDv \qquad (2)$$

(2) ergibt sich für $n=1$ durch direktes Differenzieren.

Formel (D-50):

Behauptung:

$$D^n(u\cdot v)=(n_0)u\cdot D^nv+(n)_1Du\cdot D^{n-1}v+(n)_2D^2u\cdot D^{n-2}v+... \qquad (1)$$

Nachweis:

Die von Musil nicht angegebenen Größen $(n)_0,(n)_1,(n)_2,\ldots$ müssen mit den Binomialkoeffizienten $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$ $0\le k\le n$ identifiziert[6] werden. In »*Bronstein*«, S.401, (6.23) findet sich folgende geschlossene Formel, die mit (1) vollkommen übereinstimmt.

$$D^n(uv)=\sum_{m=o}^{n}\binom{n}{m}D^muD^{n-m}v$$

[6] Vgl. Einleitung, Abschnitt 1.3, Gl. (AH-7)“

wobei $D^0 u = u$ und $D^0 v = v$ sind. Diese Beziehung stimmt mit der Behauptung überein. Die Formel (D-50) wird als Leibniz'sche Regel oder **Theorem von Leibniz** bezeichnet.

Formel (D-51):

Behauptung:

$$D^n \frac{\ln x}{x} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \right]$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Die Induktionsbehauptung ist für n identisch mit der oben stehenden Behauptung.

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Durch Anwenden der Produktregel (DA-8) sowie von (DA-11b) und (DA-13) ergibt sich

$$\begin{aligned} D^{n+1} \frac{\ln x}{x} &= \frac{(-1)^n n!(-n-1)}{x^{n+2}} \left[\ln x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \right] + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \frac{1}{x} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}} \left[\ln x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \right] \end{aligned}$$

Das entspricht der Behauptung, wenn n durch $n+1$ ersetzt wird.

Verifikation für $n = 1$:

Direktes Differenzieren von $\ln x / x$ liefert

$$D^1 \frac{\ln x}{x} = \frac{-1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} (-\ln x + 1) = \frac{(-1)^1}{x^2} \left(\ln x - \frac{1}{1} \right) \qquad (1)$$

Aus der Behauptung folgt für $n = 1$:

$$D^1 \frac{\ln x}{x} = \frac{(-1)^1}{x^2} \left(\ln x - \frac{1}{1} \right) \qquad (2)$$

Gln. (1) und (2) stimmen überein, womit der Beweis geschlossen ist.

Vorbemerkung zu den Formeln (D-52), (D-54) und (D-57):

1. Wesentliche Hinweise zu den im folgenden angegebenen Beweisen dieser Formeln verdanke ich Herrn Universitätsprofessor Dr. Gerhard Kowol[7], Mathematisches Institut, Universität Wien. Professor Kowol hat mich auf wichtige

[7] Einleitung, Abschnitt 2.3".

mathematische Literatur hingewiesen, die aus der zweiten Hälfte des 19. und der ersten Dekade des 20. Jahrhunderts stammt. Musil konnte also auf diese Literaturstellen zurückgreifen. Insbesondere hat mich Herr Professor Kowol auf je ein Buch von Dingeldey[8] und von Schlömilch[9] hingewiesen. Diese Bücher werden im Folgenden als »*Dingeldey*« und. »*Schlömilch*« zitiert.

2. In Kapitel „Einleitung“ Abschnitt 1.4 „Zur Schreibweise der Binomialkoeffizienten in Musils Formeln“ zum vorliegenden Kommentar wird gezeigt, dass die von Musil nicht definierten Größen $(n)_k$ mit den Binomialkoeffizienten gemäß Gl. (AH-3) identifiziert werden können. Diese Identifikation wird im Folgenden in den Behauptungen für die Formeln (D-52), (D-53), (D-54) und (D-56) vorgenommen ohne dass zuvor Musils veraltete Schreibweise hier aufgeführt wird.

Formel (D-52):

Behauptung:

$$D^n \sec x = \left[\binom{n}{1}\sec x^{(n-1)} - \binom{n}{3}\sec x^{(n-3)} - \binom{n}{5}\sec x^{(n-5)} - \cdots\right]\tan x$$
$$+\binom{n}{2}\sec x^{(n-2)} - \binom{n}{4}\sec x^{(n-4)} + \binom{n}{6}\sec x^{(n-6)}\cdots$$

Bemerkungen:

1. Die Schreibweise $\sec x^{(n-1)}, \sec x^{(n-2)}, \cdots$ ist nicht eindeutig und ungebräuchlich. Grundsätzlich lässt sie folgende Interpretationen zu

$$\sec x^{(n-1)} = \begin{cases} \sec x^{n-1} & \text{Interpretation 1} \\ D^{n-1}\sec x & \text{Interpreation 2} \\ \sec^{n-1} x & \text{Interpretation 3} \end{cases}$$

2. Die Interpretation 1 $\sec x^{(n-1)} = \sec x^{n-1}$ kann auf keinen Fall stimmen, weil der Prozess des Differenzierens beliebiger Ordnung eine Folge von linearen Operationen darstellt, so dass dadurch unmöglich der in der unabhängigen Variablen x nichtlineare Ausdruck $\sec x^{n-1}$ entstehen kann. Die beiden anderen Interpretationen sind grundsätzlich möglich. Jedoch zeigen Untersuchungen zur Formel (D-57), dass für sie nur die Interpretation 2 $\arctan x^{(n-1)} \equiv D^{n-1}\arctan x$ zu richtigen Ergebnissen führt. Da ferner hier nicht mitgeteilte Untersuchungen ergeben, dass die Interpretation 3 bei allen betrachteten Formeln nicht zu korrekten Ergebnissen führt, wird in allen folgenden Formeln nur die Interpretation 2 herangezogen. Die Formeln werden auf diese Schreibweise umgestellt.

---

[8] Dingeldey, Friedrich, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung, Band 1, Leipzig 1910

[9] Schlömilch, Oskar, Compendium der Hoeheren Analysis, Braunschweig, 1858

3. Eine Beziehung von der Form der Behauptung zu (D-52) wird in der Mathematik als Rekursionsformel bezeichnet. In den Spezialfällen der Formeln (D-52) mit (D-56) gestatten diese Rekursionsformeln die Berechnung der Ableitung der beliebigen Ordnung *n* aus bekannten Ableitungen niedrigerer Ordnungen.

Umgestellte Behauptung:

$$\begin{aligned} D^n \sec x = &\left[\binom{n}{1} D^{n-1}\sec x - \binom{n}{3} D^{n-3}\sec x + \binom{n}{5} D^{n-5}\sec x + \cdots\right]\tan x \\ &+\binom{n}{2} D^{n-2}\sec x - \binom{n}{4} D^{n-4}\sec x + \binom{n}{6} D^{n-6}\sec x - \cdots \end{aligned}$$

Beweis[10]:

Setze $u = \cos x$, $v = \sec x$ und wende das Theorem von Leibniz (D-50) an. Dabei ist zu beachten, dass wegen der Definition $(\text{T-1})_3$ der Funktion $\sec x$

$D^n(uv) = 0$ für alle $n > 0$

gilt. Damit folgt aus dem Theorem von Leibniz (D-50) und den Differentiationsregeln für die Funktion $\cos x$

$$\begin{aligned} 0 = &\cos x D^n \sec x - \binom{n}{1}\sin x D^{n-1}\sec x - \binom{n}{2}\cos x D^{n-2}\sec x \\ &+\binom{n}{3}\sin x D^{n-3}\sec x + \binom{n}{4}\cos x D^{n-4}\sec x - \binom{n}{5}\sin x D^{n-5}\sec x \\ &-\binom{n}{6}\cos x D^{n-6}\sec x + \cdots \end{aligned}$$

Durch Teilen mit $\cos x$ und Verbringen des ersten Terms auf die linke Seite folgt

$$\begin{aligned} D^n \sec x = &\left[\binom{n}{1} D^{n-1}\sec x - \binom{n}{3} D^{n-3}\sec x + \binom{n}{5} D^{n-5}\sec x - \cdots\right]\tan x \\ &+\binom{n}{2} D^{n-2}\sec x - \binom{n}{4} D^{n-4}\sec x + \binom{n}{6} D^{n-6}\sec x - \ldots \end{aligned}$$

Das ist genau die umgestellte Formel (D-52) von Musil.

[10] Schlömilch a. a. O., S. 47f.

Formel (D-53):

Behauptung:

$$D^n \tan x = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)}{\cos x} + \left[\binom{n}{1}D^{n-1}\tan x - \binom{n}{3}D^{n-3}\tan x + \cdots\right]\tan x$$
$$+\binom{n}{2}D^{n-2}\tan x - \binom{n}{4}D^{n-4}\tan x + \cdots$$

Beweis:

Ein eleganter Beweis von (D-53) findet sich bei Schlömilch[11]. Setze $u = \cos x$ und $v = \tan x$. Dann gilt zunächst

$$uv = \cos x \tan x = \sin x \qquad (1)$$

Differenziere (1) n-mal, wende dabei auf den mittleren Term von (1) das Theorem von Leibniz (D-50) und auf die rechte Seite von (1) Formel (D-47) an, so ergibt sich

$$\cos x D^n \tan x - \sin x\binom{n}{1}D^{n-1}\tan x - \cos x\binom{n}{2}D^{n-2}\tan x + \sin x\binom{n}{3}D^{n-3}\tan x -$$
$$\cos x\binom{n}{4}D^{n-4}\tan x + \cdots = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$$

Werden im Ausdruck auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung alle Terme außer dem ersten auf die rechte Seite gebracht und anschließend die so entstehende Gleichung auf beiden Seiten durch $\cos x$ geteilt, ergibt sich

$$D^n \tan x = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)}{\cos x} + \left[\binom{n}{1}D^{n-1}\tan x - \binom{n}{3}D^{n-3}\tan x + \cdots\right]\tan x +$$
$$+\binom{n}{2}D^{n-2}\tan x - \binom{n}{4}D^{n-4}\tan x + \cdots$$

Dies ist genau die Formel (D-53).

Formel (D-54):

Behauptung:

$$D^{n+2}\arcsin x = \frac{(2n+1)xD^{n+1}\arcsin x + n^2 D^n \arcsin x}{1-x^2}$$

[11] Schlömilch, a. a. O., S. 48

Beweis:

Bei Dingeldey[12] findet sich umgestellt auf die Schreibweise dieses Kommentars

$$\left(1-x^2\right)D^{n+2}\arcsin x-\left(2n+1\right)xD^{n+1}\arcsin x-n^2D^n\arcsin x=0 \qquad (1)$$

Dies ist identisch mit der Behauptung, wenn auf beiden Seiten mit $1-x^2$ geteilt wird.

Da das Buch von Dingeldey nicht ohne weiteres zugänglich ist, wird im Folgenden der Beweis skizziert. Ausgangspunkt ist die Formel

$$\left(1-x^2\right)D^2\arcsin x-xD\arcsin x=0 \qquad (2)$$

Durch Umstellen folgt aus (1)

$$D^2\arcsin x=\frac{x}{1-x^2}D\arcsin x \qquad (2a)$$

Nach (D-12) gilt für die erste Ableitung

$$D\arcsin x=\left(1-x\right)^{-1/2} \qquad (3)$$

Einmaliges Differenzieren von (3) liefert unter Beachtung der Kettenregel und von (3)

$$D^2\arcsin x=-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2}\left(-2x\right)=\frac{x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{1-x^2}D\arcsin x$$

Das ist genau Gl. (2a) und damit ist auch (2) bewiesen.

Als nächster Schritt wird das Theorem von Leibnitz (D-50) auf (2) angewendet. Gl. (2) enthält zwei Terme

$$T_1\left(x\right)=\left(1-x^2\right)D^2\arcsin x \qquad (4)$$

$$T_2\left(x\right)=xD\arcsin x \qquad (5)$$

Gl. (2) lautet daher wie folgt

$$D^nT_1\left(x\right)-D^nT_2\left(x\right)=0 \qquad (6)$$

Mit (D-50) folgt aus (4)

[12] Dingeldey, a. a. O., S. 16, Beispiel 21

$$D^nT_1(x) = (1-x^2)D^{n+2}\arcsin x + \binom{n}{1}(-2x)D^{n+1}\arcsin x + \binom{n}{2}(-2)D^n\arcsin x$$

$$(1-x^2)D^{n+2}\arcsin x - 2nxD^{n+1}\arcsin x - \frac{n!}{2!(n-2)!}D^n\arcsin x \tag{7}$$

$$(1-x^2)D^{n+2}\arcsin x - 2nxD^{n+1}\arcsin x - n(n-1)D^n\arcsin x$$

Entsprechend folgt aus (5)

$$D^nT_2(x) = xD^{n+1}\arcsin x + \binom{n}{1}D^n\arcsin x = xD^{n+1}\arcsin x + nD^n\arcsin x \tag{8}$$

Durch Einsetzen von (7) und (8) in (6) ergibt sich

$$(1-x^2)D^{n+2}\arcsin x - 2nxD^{n+1}\arcsin x - (n^2-n)D^n\arcsin x - xD^{n+1}\arcsin x - nD^n\arcsin x = 0$$

und durch Zusammenfassen

$$(1-x^2)D^{n+2}\arcsin x - (2n+1)xD^{n+1}\arcsin x - n^2D^n\arcsin x = 0$$

Diese Beziehung ist mit (1) identisch, womit auch Musils Formel (D-54) bewiesen ist.

Bemerkung: (D-54) ist eine Rekursionsformel, mit deren Hilfe sich die Ableitung $D^{n+2}\arcsin x$ berechnen lässt, wenn die Ableitungen $D^{n+1}\arcsin x$ und $D^n\arcsin x$ bekannt sind.

Formel (D-55):

Behauptung:

$$D^{n+1}\arcsin x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}}\left\{1 - \frac{1\cdot\binom{n}{1}}{2n-1}\cdot\frac{1-x}{1+x} + \frac{1\cdot 3\cdot\binom{n}{2}}{(2n-1)(2n-3)}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\binom{n}{3}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \cdots\right\}$$

Beweis:

Herrn Professor Dr. Gerhard Kowol, Universität Wien verdanke ich den Hinweis, dass sich (D-52) in einer äquivalenten Schreibweise bei J. Bertrand[13] findet. Anstelle der bei Musil stehenden Binomialkoeffizienten gibt Bertrand Ausdrücke der folgenden Form an

$$\frac{r\cdot(r-1)\cdots(r+1-s)}{s!} \tag{1}$$

Beispielsweise findet sich bei Bertrand der Ausdruck

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass der Ausdruck nach (1) der üblichen Definition der Binomialkoeffizienten nach $(AH\text{-}3)_1$ entspricht.

$$\binom{n}{s}=\frac{n!}{s!(n-s)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-s)\cdot(n-s+1)\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n}{s!(n-s)!}=\frac{(n-s+1)\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n}{s!}$$

Für den Beweis von (D-55) wird von der analytisch berechneten ersten Ableitung der Funktion $\arcsin x$ (vgl. *Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1) ausgegangen

$$D^1\arcsin x=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}=(1+x)^{-1/2}(1-x)^{-1/2} \tag{2}$$

Durch n-maliges Differenzieren von (2) folgt

$$D^{n+1}=\frac{d^n}{dx^n}\left[(1+x)^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\right] \tag{3}$$

Auf (3) wird das Theorem von Leibniz (D-50) angewendet Dabei werden $u=(1+x)^{-1/2}$ und $v=(1-x)^{-1/2}$ gesetzt. Im Folgenden werden zunächst die Ableitungen der Funktionen u und v und dann die ersten beiden Terme in (D-55) berechnet.

Ableitungen der Funktion u:

$$Du=-\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}\qquad D^2u=\frac{1\cdot 3}{2^2}(1+x)^{-5/2}$$
$$D^3u=-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}(1+x)^{-7/2} \tag{4}$$

[13] Bertrand, J.: Traité de calcul differérentiell et de calcul integral, Bd1 Calcul différentiell, Paris, Gauthier-Villars, 1864, S. 144

Es sei $1 < k \le n$. Dann gilt, wie leicht durch Verallgemeinerung der Ausdrücke (4) zu erkennen ist

$$D^k u = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k} (1+x)^{-(2k+1)/2} \tag{5}$$

Gl. (5) lässt sich sehr einfach durch vollständige Induktion beweisen. Durch Differenzieren von (5) ergibt sich

$$\begin{aligned} D^{k+1} u &= (-1)^{k+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k} \frac{2k+1}{2} (1+x)^{-(2k+3)/2} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}{2^{2k+1}} (1+x)^{-[(2k+1)+3]/2} \end{aligned} \tag{6}$$

Gl. (6) entspricht für $k+1$ vollkommen der Form (5) für k. Die Verifikation ergibt sich, indem in (5) $k=0$ gesetzt wird, wodurch sofort die erste Ableitung gemäß (4) erhalten wird.

Ableitungen der Funktion v:

$$\begin{aligned} &Dv = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} && D^2 v = \frac{1 \cdot 3}{2^2}(1-x)^{-5/2} \\ &D^3 v = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}(1-x)^{-7/2} && D^k v = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k}(1-x)^{-(2k+1)/2} \end{aligned} \tag{7}$$

Das allgemeine Glied (7) lässt sich wieder sehr einfach durch vollständige Induktion beweisen, was hier nicht angegeben wird. Aus der allgemeinen Formel in (6) folgt für die Fälle $k = n-1$ und $k = n$

$$\begin{aligned} D^{n-1} v &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^{n-1}}(1-x)^{-(2n-1)/2} \\ D^n v &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n}(1-x)^{-(2n+1)/2} \end{aligned} \tag{8}$$

Berechnung des ersten Gliedes nach dem Theorem von Leibniz (D-50)

$$\begin{aligned} u \cdot D^n v &= (1+x)^{-1/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n}(1-x)^{-(2n+1)/2} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n (1-x)^n \sqrt{1-x^2}} = P \end{aligned} \tag{9}$$

Aus (9) ist zu erkennen, dass $u \cdot D^n v = P$ gerade den vor der geschweiften Klammer stehenden Vorfaktor in der Behauptung darstellt.

Berechnung des zweiten Gliedes nach dem Theorem von Leibniz (D-50)

$$\binom{n}{1} Du \cdot D^{n-1}v = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2} \cdot \frac{\binom{n}{1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n-1}} (1-x)^{-2(n-1)/2}$$

Durch Zerlegen in den Vorfaktor P nach (8) und einen Restfaktor ergibt sich

$$Du \cdot D^{n-1}v = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n (1+x)^n \sqrt{1-x^2}} \cdot \left(-\frac{\binom{n}{1}}{2n-1} \frac{1-x}{1+x} \right) \tag{10}$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite entspricht vorzeichenrichtig dem zweiten Glied in der geschweiften Klammer auf der rechten Seite der Behauptung. In gleicher Weise lassen sich die folgenden Glieder berechnen. Damit ist der Beweis geschlossen.

Formel (D-56):

Behauptung:

$$D^{n+1} \arctan x = -\frac{2nxD^n \arctan x + n(n-1)D^{n-1} \arctan x}{1+x^2}$$

Beweis:

Der Beweis lehnt sich an den von Dingeldey[14] skizzierten Beweis für (D-54) an. Es gilt

$$D^1 \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \tag{1}$$

$$D^2 \arctan x = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \tag{2}$$

Es ist leicht einzusehen, dass für diese beiden Ableitungen der folgende funktionale Zusammenhang besteht

$$\underbrace{\left(1+x^2\right)D^2 \arctan x}_{\text{Term1}} + \underbrace{2xD^1 \arctan x}_{\text{Term 2}} = 0 \tag{3}$$

[14] Vgl. Fußnote 12.

Als nächstes werden die Terme 1 und 2 in (3) mit Hilfe des Theorems von Leibniz (D-50) n-mal nach x differenziert.

Differenzieren von Term 1:

Setze $u = 1 + x^2$ und $v = D^2 \arctan x$. Bei der Anwendung des Theorems von Leibniz (D-50) ist zu beachten, dass $D^k\left(1+x^2\right) = 0$ für alle $k \geq 3$ ist. Daher folgt

$$D^n\left[\left(1+x^2\right)D^2 \arctan x\right] = \left(1+x^2\right)D^{n+2}\arctan x + \binom{n}{1}2xD^{n+1}\arctan x + \binom{n}{2}2D^n \arctan x \tag{4}$$

Ferner gilt

$$2\binom{n}{2} = 2\frac{n!}{2!\left(n-2\right)!} = \frac{\left(n-2\right)!\left(n-1\right)n}{\left(n-2\right)!} = n\left(n-1\right) \tag{5}$$

Aus (4) folgt für den Term 1

$$D^n\left[\left(1+x^2\right)D^2 \arctan x\right] = \left(1+x^2\right)D^{n+2}\arctan x + 2nxD^{n+1}\arctan x + n\left(n-1\right)D^n \arctan x \tag{6}$$

Differenzieren von Term 2:

Setze $u = 2x$ und $v = D^1 \arctan x$ .Bei der Anwendung des Theorems von Leibniz (D-50) ist zu beachten, dass $D^k 2x = 0$ für alle $k \geq 2$ ist. Daher folgt

$$D^n\left(2x \arctan x\right) = 2xD^{n+1}\arctan x + 2\binom{n}{1}D^n \arctan x = 2\left(xD^{n+1}\arctan x + nD^n \arctan x\right) \tag{7}$$

Aus (3), (6) und (7) ergibt sich

$$\left(1+x^2\right)D^{n+2}\arctan x + 2\left(n+1\right)xD^{n+1}ar\tan x + n\left(n+1\right)D^n \arctan x = 0$$

oder

$$D^{n+2}\arctan x = -\frac{2\left(n+1\right)xD^{n+1}\arctan x + n\left(n+1\right)D^n \arctan x}{1+x^2} \tag{8}$$

Gl. (8) entspricht noch nicht vollständig (D-56), da dort die Differentiationsordnungen $n+1$, n und $n-1$ auftreten. Da jedoch n eine beliebige natürliche Zahl ist, kann es durch $n = m-1$ ersetzt werden. Damit folgt aus (8)

$$D^{m+1}\arctan x = -\frac{2mD^m \arctan x + m(m+1)D^{m-1}\arctan x}{1+x^2} \tag{9}$$

Wegen der Beliebigkeit von m und n stimmt (9) mit (D-56) überein.

Formel (D-57):

Vorbemerkungen:

Der nachstehende Beweis ist zu einem wesentlichen Teil in dem Buch von Gravelius[15] zu finden, auf das mich Herr Professor Dr. G. Kowol hingewiesen hat. Allerdings hat Gravelius nicht alle Einzelheiten angegeben. Daher wird der Beweis im Folgenden angegeben. Unter anderem ist die nicht triviale Rücksubstitution von der abhängigen Variablen y zur unabhängigen Variablen x erforderlich

Behauptung:

$$D^n \arctan x = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot\dots\cdot(n-1)}{\sqrt{(1+x^2)^n}}\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right)$$

Dies lässt sich kompakter in folgender Form schreiben

$$D^n \arctan x = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{(1+x^2)^n}}\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right)$$

Beweis:

Zunächst wird eine einfache trigonometrische Hilfsformel abgeleitet. Es sei $0 \le \alpha \le 2\pi$ ein beliebiger Winkel und n eine natürliche Zahl. Behauptet wird

$$\cos\left[n\alpha + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] = \sin\left[n\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{1}$$

Setze in (T-31) $p = n(\alpha + \pi/2)$ und $q = \pi/2$. Dann folgt aus (T-31)

$$\cos\left[n\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[n\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\frac{\pi}{2} + \sin\left[n\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin\frac{\pi}{2}$$

Wegen $\sin\pi/2 = 1$ und $\cos\pi/2 = 0$ folgt die Richtigkeit von (1).

Es sei weiter

$$y = \arctan x$$

---

[15] Gravelius, Harry, Lehrbuch der höheren Analysis,I. Band Lehrbuch der Differentialrechnung. Berlin, 1893, 89f.

Dann gilt für die erste Ableitung nach »Bronstein«, S. 396, Tabelle 6.1

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \tag{2}$$

Aus der Definition der Funktion $\arctan x$ [16] folgt, dass

$$x = \tan y \tag{3}$$

Damit gilt unter Beachtung von zunächst (2) und (3) und dann (TH-5) und (TH-1)

$$y' = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{\cos^2 y}{\underbrace{\sin^2 y + \cos y^2}_{=1}} = \cos^2 y \tag{4}$$

Andererseits folgt aus mit (1) für $n = 1$

$$y' = \cos^2 y = \cos y \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \tag{4a}$$

Nochmaliges Differenzieren von (4a) nach x liefert mit der Kettenregel (DA-10)

$$\begin{aligned} y'' &= y'\left[-\sin y \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) + \cos y \cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ &y' \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei folgt die zweite Umformung aus (1) – wobei $\alpha = y$ und $n = 2$ gesetzt werden - und darauf folgendes Einsetzen von (4). Nochmaliges Differenzieren[17] ergibt mit erneutem Anwenden von (1)

$$\begin{aligned} y''' &= y'\left[-2\cos y \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) + 2'\cos^2 y \cos 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ &2y' \cos y \cos\left(3y + 2\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^3 y \sin 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Aus den Formeln (4) mit (6) wird geschlossen, dass allgemein gilt

$$D^n y = (n-1)! \cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \tag{7}$$

---

[16] Vgl. »Bronstein«, S. 86, Tabelle 2.6, dritte Zeile von oben.

[17] Bei Gravelius steht in der ersten Zeile der folgenden Formel ein Druckfehler. Es heißt dort in der ersten Zeile für den zweiten Term innerhalb der runden Klammer $2\cos^2 y \sin 2(y + \pi/2)$. Richtig muss es heißen $2\cos^2 y \cos 2(y + \pi/2)$.

Gravelius[18] führt aus, dass sich diese Formel durch vollständige Induktion beweisen lässt. Der Induktionsbeweise wird im Folgenden angegeben. Durch Differenzieren von (7) folgt (Induktionsschritt von n nach $n+1$)

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}y = (n-1)!\left\{-n\cos^{n-1}\sin y y'\sin\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]+\cos^{n} y\cos\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]ny'\right\} = \\
n!\cos^{n+1} y\left\{-\sin y\sin\left[n\left(+\frac{\pi}{2}\right)\right]+\cos y\cos\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Die zweite Zeile von (8) wird mit Hilfe von (T-30) mit $p = y$ und $q = n(y+\pi/2)$ umgeformt. Dadurch ergibt sich

$$
D^{n+1}y = n!\cos^{n+1} y\sin\left[(n+1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{9}
$$

Es geht also (9) aus (7) hervor, wenn n durch $n+1$ ersetzt wird. Da ferner aus (9) für $n = 0$ die korrekte Gl. (4) erhalten wird, ist der Induktionsbeweis geschlossen.

In einem letzten Schritt wird die Variable y auf die Variable x zurückgeführt[19]. Dabei wird von folgender Formel aus http://functions.wolfram.com/PDF/ArcTan.pdf, aufgerufen 22.11.2016, 21:20 mit der Nummer 01.14.16.0019.01 Gebrauch gemacht.

$$
\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x - \arctan x \qquad x \neq 0 \tag{10}
$$

In (10) bedeutet $\operatorname{sgn} x$ die Signumfunktion, die wie folgt definiert ist

$$
\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases} \tag{11}
$$

Bei »Bronstein«, S. 87, (2.148) findet sich

$$
\arctan x = \operatorname{sgn} x \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{12}
$$

Da sowohl in (10) als in (12) die Signumfunktion $\operatorname{sgn} x$ auftritt, werden bei der Rücksubstitution die beiden Fälle $x > 0$ und $x < 0$ getrennt behandelt werden.

---

[18] Gravelius, a. a. O., S. 90 vermerkt:“was man in der That durch den Schluss von *n auf n+1* bestätigt.“

[19] Dieser Teil des Beweises wird von Gravelius nicht angegeben. Er stellt eine Rücksubstitution dar. Herrn Professor Dr. Dr. h. c. Hans-Dieter Alber, Technische Hochschule Darmstadt danke ich für die Überprüfung der von mir gewonnenen Rücksubstitution.

Fall 1: $x > 0$

Aus (7) ergibt sich für den zweiten Term unter Berücksichtigung von $y = \arctan x$ mit (10)

$$\sin\left[n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left[n\left(\pi - \arctan\frac{1}{x}\right)\right]$$

Wird in (T-29) $p = n\pi$ und $q = n\arctan(1/x)$ gesetzt, so folgt

$$\sin\left[n\left(\pi - \arctan\frac{1}{x}\right)\right] = \sin n\pi \cos n\arctan\frac{1}{x} - \cos n\pi \sin n\arctan\frac{1}{x} \tag{13}$$

Wegen $\sin n\pi = 0$ und $\cos n\pi = (-1)^n$ wird für alle natürlichen Zahlen n aus (13)

$$\sin\left[n\left(-y + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -(-1)^n \sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right) \tag{14}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite von (9) folgt aus (12) und wegen $y = \arctan x$

$$\cos^n y = \cos^n(\cos\arctan x) = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n/2}} \tag{15}$$

Einsetzen von (14) und (15) in (7) liefert das Ergebnis

$$D^n \arctan x = -\frac{(-1)^n (n-1)!}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^n}} \sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right) \tag{16}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von Musil überein, denn in der Behauptung steht im Zähler der Faktor $(-1)^{n-1}$, während sich in (15) der Faktor $-(-1)^n$ findet. Es ist jedoch $(-1)^{n-1} = -(-1)^n$, was sich leicht zeigen lässt, indem beide Seiten der vorstehenden Gleichung mit -1 multipliziert werden. Daher stimmen für den Fall $x > 0$ Musils Formel (D-57) mit (16) überein.

Fall 2: $x < 0$

Aus (10) folgt für den zweiten Term auf der rechten Seite von (7)

$$\sin\left[n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(-n\arctan\frac{1}{x}\right) = -\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right) \tag{17}$$

Weiter gilt wegen $y = \arctan x$, (12) und der Gleichung $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (α beliebig) Gl. (15) unverändert auch für $x < 0$

Einsetzen von (15) und (17) in (7) führt auf

$$D^n \arctan x = -\frac{(n-1)!}{\left(1-x^2\right)^{n/2}} \sin\left(n \arctan\frac{1}{x}\right) \tag{18}$$

Gl. (18) stimmt weder mit (D-57) noch mit der von Gravelius angegebenen Gleichung überein. Es lässt sich jedoch eine für beide Vorzeichenbereiche der Variablen x gültige Formel angeben (s. die folgenden Zusammenfassung).

<u>Zusammenfassung</u>:

Die Behauptung ist korrekt für $x > 0$. Für $x < 0$ muss der sowohl von Musil in (D-57) als Gravelius[20] angegebene Term $(-1)^{n-1}$ entfallen. Das Ergebnis lässt sich mit Hilfe der Signum-Funktion für die beiden Fälle $x > 0$ und $x < 0$ wie folgt zusammenfassen

$$\boxed{D^n \arctan x = -\frac{\left[\operatorname{sgn}(-x)\right]^n (n-1)!}{\left(1-x^2\right)^{n/2}} \sin\left(n \arctan\frac{1}{x}\right)} \tag{19}$$

Ob Musil seine Behauptung von Gravelius übernommen hat, lässt sich nicht entscheiden. Dagegen spricht, dass Gravelius die Formel mit der kompakten Schreibweise $(n-1)!$ anstelle von Musils Notation $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)$ angibt. Auf der anderen Seite gibt es keinerlei Hinweise, dass Musil diese verhältnismäßig komplexe Formel selbst abgeleitet hat.

<u>Formel (D-58):</u>

<u>Behauptung:</u>

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

<u>Nachweis:</u> »Bronstein«, S. 411, (6.46a)

<u>Bemerkung zu den Formeln (D-59), (D-60)$_1$ und (D-60)$_2$:</u>

Als nächstes werden die Formeln (D-60)$_1$ und (D-60)$_2$ behandelt, weil sich (D-59) als Spezialfall aus (D-60)$_2$ herleiten lässt.

[20] Gravelius a. a. O. Formel VIII.

Formel (D-60)$_1$:

Behauptung:

In der Behauptung müssen wieder die Koeffizienten $(n)_0, (n)_1, \ldots$ durch die Binomial-koeffizienten ersetzt werden. Dann gilt

$$d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \binom{n}{2} \frac{\partial^n z}{\partial^{n-2} x \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \cdots \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n$$

Die Richtigkeit der Behauptung folgt aus (D-60)$_2$.

Formel (D-60)$_2$:

Behauptung:

$$d^n z = \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy \right)^n \partial^n z$$

Analyse

In der von Musil angegebenen Form ist die Formel unüblich. Sie lautet sie nach »Bronstein«, S. 412, (6.47)

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z \qquad (1)$$

Bemerkungen

1. Musil hat die innerhalb der Klammer auftretende Größe ∂ ausgeklammert, wodurch sich hinter der Klammer der Ausdruck ∂^n ergibt.

2. Der Ausdruck $\left[(\partial / \partial x) dx + (\partial / \partial y) dy \right]^n$ stellt einen Differenzialoperator der Ordnung n dar. Für eine beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{Z}$ kann die Behauptung mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes[21]

   $$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
   (2)

   entwickelt werden, wobei $a = (\partial / \partial x) dx$ und $b = (\partial / \partial y) dy$ gesetzt werden. Rein formal hat Musil in der Behauptung die Größe ∂ ausgeklammert und ist dadurch zu seiner Schreibweise gekommen. Jedoch kommt der Größe ∂ keine eigene Existenz zu. Es existieren nur – wie richtig in (1) dargestellt –

[21] »Bronstein«, S. 12, (1.36b)

einerseits die partiellen Differenzialquotienten $\partial / \partial x$ und $\partial / \partial y$ und andererseits die Differenziale dx und dy.

Beweis von $(\text{D-60})_1$:

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes. Er lautet in ausgeschriebener Form (vgl. (2) in $(\text{D-60})_2$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \tag{1}$$

Werden die Größen a und b mit den Größen $(\partial / \partial x)dx$ und $(\partial / \partial y)dy$ identifiziert, so folgt aus (1)

$$\begin{aligned} d^n z = {} & \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \binom{n}{2} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 \\ & + \binom{n}{3} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3} \partial y^3} dx^{n-3} dy^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}} dx dy^{n-1} + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n \end{aligned} \tag{2}$$

Das ist genau $(\text{D-60})_1$.

Formel (D-59):

Behauptung:

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$

Beweis:

Aus $(\text{D-60})_3$ folgt für $n = 3$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + \binom{3}{1} \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + \binom{3}{2} \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \binom{3}{3} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$

Nach (AH-3) gilt

$$\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3 \text{ und } \binom{3}{3} = 1$$

Damit ist die Richtigkeit von (D-59) nachgewiesen.

Formel (D-61):

Behauptung:

$$d^n\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n \partial^n\mu$$

Bemerkungen:

1. In der behaupteten Form ist Formel (D-61) falsch, weil auf der rechten Seite der Operator ∂^n hinter der runden Klammer nicht vor der abhängigen Größe μ stehen darf [(vgl. hierzu auch $(D\text{-}60)_2$]. Denn dadurch ergeben sich auf der rechten Seite vollkommen falsche Terme. So lautet nach Musil beispielsweise der erste Term auf der rechten Seite

   $$\frac{\partial^{2n}z}{\partial x^n}$$

   was unsinnig ist, weil die Ordnungen der Differenzialausdrücke in Zähler und Nenner gleich sein müssen.

2. Ferner fehlt ein Hinweis, dass die Funktion $\mu = (x, y, z)$ von den unabhängigen Variablen *x, y* und z abhängt.

3. Es stellt wohl mehr als einen Flüchtigkeitsfehler dar, dass Musil auf der rechten Seite von (D-61) vor der Variablen μ den Operator ∂^n eingefügt hat. Dies gilt umso mehr, als Musil der gleiche Fehler auch bei der Formel $(D\text{-}60)_2$ unterlaufen ist. Bei der Analyse der Formeln (D-66) mit (D-79) wird sich herausstellen, dass dieser Fehler sich durchzieht und daher zu schwerwiegenden Konsequenzen führt.

Nachweis:

Die berichtigte Formel lautet für drei unabhängige Variablen x, y und z [vgl. »*Bronstein*«, S. 412, (6.48)]

$$d^n\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n \mu$$

Vorbemerkung zu den Formeln (D-62) und (D-63):

Bei diesen Formeln handelt es sich um die Berechnung der zweiten und dritten Ableitung einer impliziten Funktion von zwei unabhängigen Variablen x und y. Vorausgesetzt wird also ein funktionaler Zusammenhang der Form

$$f(x, y) = 0$$

Diese Voraussetzung wird bei Musil nicht explizit angegeben sondern durch den äquivalenten Hinweis „Höhere Differenzialquotienten impliziter Funktionen“ ersetzt.

<u>Formel (D-62)</u>:

<u>Behauptung:</u>

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}=0$$

<u>Nachweis:</u> »*Bronstein*«, S. 413, (6.53d)

<u>Hinweis:</u> »*Bronstein*« führt sinngemäß folgende Abkürzungen für die partiellen Ableitungen ein:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x} \qquad f_y=\frac{\partial f}{\partial y} \qquad f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

<u>Formel (D-63)</u>:

<u>Behauptung:</u>

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}+$$
$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^3 y}{dx^3}=0$$

<u>Nachweis:</u> »Bronstein«, S. 414, (6.53f) unter Beachtung der im Hinweis zu (D-62) angegebenen Abkürzungen für die partiellen Ableitungen.

<u>Vorbemerkung zu den Formeln (D-64) und (D-65)</u>:.

(D-64) ist ein Spezialfall von (D-65) für $n=2$. Daher wird zunächst (D-65) betrachtet.

<u>Formel (D-65)</u>:

<u>Behauptung:</u>

$$d^n y=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n\right)^n$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Funktion $y=f\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)$ von n unabhängigen Variablen $x_1,x_2,\ldots x_n$ abhängt, was Musil angibt.

Analyse:

Musil führt die abhängige Variable y innerhalb der runden Klammer auf. Das ist falsch. Auch an dieser Stelle hat Musil den Charakter des Differenzialoperators nicht erkannt. Seine Schreibweise führt auf einen nichtlinearen Ausdruck für das totale Differenzial $d^n y$ von der Ordnung n. Richtig müsste die Formel lauten

$$d^n y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^n y$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 412, (6.48), wobei die abhängige Variable mit u bezeichnet wird.

Formel (D-64):

Behauptung:

$$d^2 y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \right)^2$$

Analyse:

Sonderfall von (D-65) für $n = 2$. Diese Formel enthält den gleichen Fehler wie (D-65).

Formeln (D-66) mit (D-79)

Vorbemerkungen

I. Diese Formeln weisen gewisse Gemeinsamkeiten auf. In ihnen werden Differentials erster, zweiter und in einem Fall dritter Ordnung angegeben.

II. Für die Formeln gelten die folgenden, definitorischen Voraussetzungen:

a. $z := f(x, y) \qquad y = \varphi(x)$

b. $x := \psi(\lambda) \qquad y := \chi(\lambda)$

Im Falle IIa. hängt die Funktion $f(x, y)$ sowohl direkt von der Variablen x als auch implizit von der Funktion $\varphi(x)$ ab. Dies wird bei Musil nicht so klar dargestellt, weil in der Voraussetzung IIa. das Kommazeichen zwischen den Größen fehlt.

Im Fall IIb. hängen die beiden Größen x und y über die Funktionen $\psi(\lambda)$ und $\chi(\lambda)$ von der Variablen λ ab, die auch als Parameter bezeichnet werden kann.

III. Im Folgenden werden Ableitungen durch hoch gestellte Striche (z. B. y', y'') gekennzeichnet.

Formel (D-66)$_1$

<u>Behauptung</u>

$$dy = \varphi'(x)dx$$

<u>Nachweis</u>

Bronstein, S. 399, Formel (6.17) mit $f'(x) \equiv \varphi'(\lambda)$

Formel (D-66)$_2$

<u>Behauptung</u>

$$dy = \chi'(\lambda)d\lambda$$

<u>Nachweis</u>

Nach wie für (D-66)$_1$ Bronstein S. 399, Formel (6.17) mit $x' \equiv \psi'(\lambda)$

Formel (D-66)$_3$

<u>Behauptung</u>

$$dx = \psi'(\lambda)d\lambda$$

<u>Nachweis</u>

Nach wie für (D-66)$_1$ Bronstein S. 399, Formel (6.17) mit $y' \equiv \chi'(\lambda)$

Formel (D-66)$_4$

<u>Behauptung</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\chi'(\lambda)}{\psi'(\lambda)}$$

<u>Nachweis</u>

Folgt direkt durch Einsetzten von (D-66)$_4$ und (D-66)$_3$ auf der rechten Seite.

Formel (D-67)

Behauptung

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d\left(dx\right) + \frac{\partial z}{\partial y} d\left(dy\right)$$

Bemerkung

$d\left(dx\right)$ und $d\left(dy\right)$ sind Differentiale zweiter Ordnung.

Analyse

Formel (D-67)$_1$ enthält den „Standardfehler", dass auf der rechten Seite im Klammerausdruck die Variable z innerhalb der Klammer auftaucht. Die Formel ist daher falsch.

Bemerkungen

1. Für die Formeln (D-68) mit (D-70) gelten die Voraussetzungen nach IIa.

2. Musil führt ohne Definitionsgleichungen folgende Abkürzungen ein

$$d\left(dx\right) = d^2 x$$
$$d\left(dy =\right) d^2 y$$
$$d\left(dz\right) = d^2 z$$

Formel (D-68)

Behauptung

$$d\left(dx)\right) = 0$$

Diese Behauptung lässt sich wie folgt umschreiben.

$$\frac{d^2 x}{dx^2} = 0$$

Nachweis

$$\frac{d^2 x}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx} 1 = 0$$

Formel (D-69)

Behauptung

$$d\left(dy\right)=\varphi''\left(x\right)d^2x$$

Nachweis

Folgt durch zweimaliges Differenzieren der Voraussetzung Ia.

Formel (D-70)

Behauptung

$$d^2z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2+\varphi''\left(x\right)d^2x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

Der zweite Term der Formel ist unschön angeschrieben. Besser lesbar ist die folgende Version.

$$d^2z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}\varphi''\left(x\right)d^2x$$

Analyse

1. (D-70) folgt direkt aus (D-67) durch Einsetzen von (D-68) und (D-69)
2. Der Term in Klammern enthält wieder die Variable z und ist daher falsch.

Bemerkung

Für die Formeln (D-71) bis (D-79) gelten die Voraussetzungen IIb.

Formel (D-71)

Behauptung

$$d\left(dx\right)=d^2x=\varphi''\left(\lambda\right)d\lambda^2$$

Nachweis

Setzte in (D-69) $y=x$ und $x=\lambda$, dann ergibt sich die Behauptung.

Formel (D-72)

Behauptung

$$d(dy) = d^2y = \chi''(\lambda)d\lambda^2$$

Analyse

Setzte in (D-69) $\varphi'' = \chi''$ und $x = \lambda$

Formel (D-73)

Behauptung

$$d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y$$

Analyse

Diese Formel ist identisch mit (D-67). Sie enthält den Standardfehler, dass in der Klammer auf der rechten Seite die Größe z auftaucht und ist daher falsch.

Formel (D-74)

Behauptung

$$d^3z = (dz)^3 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}d(dx^2) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}d(dxdy) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}d(dy^2)$$

Analyse

Die Behauptung lässt sich nicht interpretieren. Insbesondere ist nicht zu erschließen, was Musil unter dem Term $(dz)^3$ versteht. Woher die drei restlichen Terme in der Behauptung stammen, ist ebenfalls unklar.

Formeln (D-76) und (D-77)

Hierbei handelt es sich nicht um Formeln sondern um Voraussetzungen.
Musils Wort „Ausnahme“ ist missverständlich. Die Funktionen $\psi(\lambda)$ und $\chi(\lambda)$ hängen linear von dem Parameter λ ab. Es gilt also

$$x = \psi(\lambda) = a\lambda + b$$

$$y = \chi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$$

Behauptungen

$$d^3z = (dz)^3 \tag{D-78)$_1$ }$$

$d^3z = (dz)^3$ (D-78)$_1$

$\psi' = a, \quad \psi'' = \psi''' = \cdots = 0$ (D-78)$_2$

$\chi' = \alpha \quad \chi'' = \chi''' = \cdots = 0$ (D-79)

Analyse

(D-78)$_1$ lässt sich nicht interpretieren, weil Musil keine Definition des Ausdrucks $(dz)^3$ angegeben hat. Sollte es sich um das Differential dritter Ordnung handeln, ist (D-78)$_1$ trivial. Die Gleichungen (D-78)$_2$ und (D-79) folgen aus den Voraussetzungen nach (D-76) und (D-77).

Vorbemerkung zu den Formeln (D-80) und (D-81)

1. Für diese beiden Formeln wird vorausgesetzt, dass eine gegebene Funktion mittelbar über mehrere Funktion von einer unabhängigen Variablen abhängt. Es gilt also

   $y = f(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad x_1 = f_1(x), x_2 = f_2(x), \dots x_n = f_n(x)$ (V)

2. In Anlehnung an »*Bronstein*«, S. 413, (6.51a) ist es zur Verbesserung der Lesbarkeit zweckmäßig, die unabhängige Variable mit ξ anstelle von x zu bezeichnen. Dann lautet die Voraussetzung (V)

   $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad x_1 = f_1(\xi), x_2 = f_2(\xi), \dots, x_n = f_n(\xi)$ (V-1)

3. Es wird daran erinnert, dass Musil in Übereinstimmung mit »*Bronstein*« folgende Abkürzungen eingeführt hat

   $x_1' = \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \quad x_2' = \frac{df_2(\xi)}{d\xi}$ usw. $\qquad x_1'' = \frac{d^2f_1(\xi)}{d\xi^2} \qquad x_2'' = \frac{d^2f_2(\xi)}{d\xi^2}$ usw.

   (V-2)

Formel (D-80):

Behauptung:

Mit der Voraussetzung (V-1) gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} x_2' + \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} x_n'$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 413, (6.51a) und (6.51b)

Formel (D-81):

Behauptung:

Mit der Voraussetzung (V-2) gilt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'' + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n''$$

Analyse

Das korrekte Ergebnis für die zweite Ableitung $d^2y/d\xi^2$ ergibt sich durch Differenzieren der Behauptung von (D-80). Unter Beachtung der Produktregel (DA-8) und der Kettenregel (DA-10) folgt

$$\frac{dy^2}{d\xi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(x_1'\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'' + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(x_2'\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2'' + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\left(x_n'\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'' \tag{1}$$

In (1) sind die Bedeutungen der in (V-2) eingeführten Abkürzungen zu beachten. Der Vergleich von (1) mit der Behauptung zeigt, dass die von Musil angegebene Formel (D-81) nicht stimmt.

Formel (D-82):

Behauptung:

Unter der Voraussetzung[22]

$$F(x,y) = 0$$

gilt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

[22] Bei Musil fehlt das Komma in der Klammer, was üblich ist. Ferner vermerkt Musil nicht, dass die Variable $y = f(x)$ durch (1) implizit gegeben ist.

Analyse:

Zunächst wird die Behauptung auf die Notation von »*Bronstein*«, S. 413, (6.53c) und (6.53d) umgeschrieben.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^2} \tag{1}$$

Die Formeln von »*Bronstein*«, S. 413, (6.53c) und (6.53d) lauten

$$F_x + F_y y' = 0 \quad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{F_x}{F_y} \qquad \text{falls } F_y \neq 0 \tag{2}$$

$$F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}\left(y'\right)^2 + F_y y'' = 0 \tag{3}$$

Durch Auflösen von (3) nach y'' und Einsetzen von y' nach (2) folgt

$$y'' = \frac{-F_{xx}F_y{}^2 + 2F_{xy}F_xF \; - F_{yy}\left(F_x\right)^2}{\left(F_y\right)^3} \tag{4}$$

Diese Formel stimmt mit »*Bronstein*«, S. 414, (6.53e) und (D-82) überein.

Vorbemerkungen zu den Formel (D-83) bis (D-86):

1. Ein Teil der Formeln (D-83) mit (D-86) findet sich bei »*Bronstein*«, S. 414, (6.54a) und (6.54b). Die Notation von »*Bronstein*« und Musil stimmen nicht überein.

2. »*Bronstein*« geht davon aus, dass eine Funktion $u = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ von n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ in impliziter Form $F\left(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n, u\right) = 0$ gegeben ist. Musil behandelt den Spezialfall zweier unabhängiger Variablen in der Schreibweise $F\left(x, y, z\right) = 0$, wobei nicht darauf hingewiesen wird, dass die Größe z ihrerseits eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen x und y ist. Ferner verwendet »*Bronstein*« für die partiellen Ableitungen der Funktion die heute allgemein übliche Notation

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} =: F_{x_1} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} =: F_{x_2} \qquad \frac{\partial F}{\partial u} =: F_u$$

Nach diesem Schema lassen sich auch die partiellen Ableitungen höherer Ordnung kompakt notieren.

Zur Übersetzung der folgenden Formeln in die von Musil dient die nachstehende Tabelle.

Tabelle 1: Korrespondenz zwischen »*Bronstein*«, S. 413, (6.53c) und (6.53d) und Musil (D-83) bis (D-86)

Bronstein	*Musil*
x_1	x
x_2	y
u	z
F_{x_1}	$\partial F / \partial x$
F_{x_2}	$\partial F / \partial y$
F_u	$\partial F / \partial z$

Gesucht sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion u nach den Variablen x_1 und x_2.

$$p := \frac{\partial z}{\partial x} \qquad q := \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r := \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad s := \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \qquad t := \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Die Schreibweise von Bronstein ist klarer und eindeutiger als die von Musil. Daher werden im Folgenden Musils Formeln auf die Bezeichnungen nach »*Bronstein*« unter Beachtung von Tabelle 4.2 umgeschrieben.

Vorbemerkung zu (D-83) mit (D-86)

Zunächst werden die Formeln (D-84) und (D-86) und dann (D-85) bewiesen. Für alle drei Formeln gilt die Voraussetzung von (D-83).

Formel (D-83):

Behauptung:

Wenn

$$F(x_1, x_2, u) = 0$$

dann

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_u} \quad \textbf{(1)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_u} \quad \textbf{(2)}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 414, (6.54b)

Formel (D-84):

Behauptung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\frac{F_{x_1 x_1} + 2F_{x_1 u}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + F_{uu}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2}{F_u}$$

Beweis

Aus (1) in (D-83) folgt durch Umstellen

$$F_{x_1} + F_u \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \qquad (1)$$

Partielles Differenzieren von (1) nach x_1 liefert

$$F_{x_1 x_1} + 2F_{u x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + F_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + F_u \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 \qquad (2)$$

Auflösen nach $\partial^2 u / \partial x_1^2$ liefert die Behauptung. Zu beachten ist, dass aufgrund von (D-83) die beiden partiellen Ableitungen $\partial u / \partial x_1$ und $\partial u / \partial x_2$ bekannt sind.

Formel (D-86):

Behauptung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{F_{x_2 x_2} + 2F_{x_2 u}\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + F_{uu}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2}{F_u}$$

Beweis

Partielles Differenzieren von $\partial u / \partial x_2$ in (2) von (D-84) nach x_2 liefert

$$F_{x_2 x_2} + 2F_{u x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + F_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + F_u \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

Durch Auflösen nach $\partial^2 u / \partial x_2^2$ folgt die Behauptung. (D-86) wird auch durch Vertauschen von x_1 in (D-85) mit x_2 erhalten.

Formel (D-86):

Behauptung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{F_{x_1x_2} + F_{x_1u}\frac{\partial u}{\partial x_2} + F_{x_2u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + F_{uu}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}}{F_u}$$

Beweis:

Vorbemerkung

Zu beachten ist, dass die gemischte zweite Ableitung invariant gegenüber Vertauschung der Indizes 1 und 2 sein muss, was bei der Behauptung zutrifft. Ferner muss die Reihenfolge der Bildung der partiellen Ableitungen irrelevant sein und daher gilt $F_{x_1x_2} = F_{x_2x_1}$.

Partielles Differenzieren von (1) in Gln. (83) liefert

$$F_{x_1x_2} + F_{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + F_{ux_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + F_{uu}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + F_u\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad (1)$$

Entsprechend folgt aus (2) in Gln. (D-83)

$$F_{x_2x1} + F_{x_2u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + F_{ux_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + F_{uu}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + F_u\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \qquad (2)$$

Addieren[23] von Gln. (1) und (2) ergibt

$$2F_{x_1x_2} + 2F_{x_1u}\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2F_{x_2u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2F_{uu}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2F_u\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad (3)$$

Kürzen des Faktors 2 und Auflösen nach $\partial^2 u / \partial x_1 \partial x_2$ ergibt die Behauptung.

Vorbemerkung zu (D-88) mit (D-90):

1. In diesen drei Formeln wird die unabhängige Variable x durch eine neue Variable t ersetzt. Es sei $y = f(x)$ und es werde die neue unabhängige Variable t eingeführt durch die Gleichung $x = \psi(t)$. Dann lässt sich die abhängige Variable darstellen durch den funktionalen Zusammenhang $y = f[\psi(t)] = \chi(t)$. Gesucht werden die ersten drei Ableitungen dy / dx, d^2y / dx^2 und d^3y / dx^3 ausgedrückt durch Funktionen der neuen Variablen t

[23] Addieren ist erlaubt, weil auf beiden rechten Seiten der Gln. (1) und (2) die Zahl 0 steht.

2. Musil schreibt weiter bei den Voraussetzungen auch die implizite Definition der Variablen y durch die Gleichung $F(x,y)=0$ an. Jedoch wird dieser Fall von ihm nicht behandelt, so dass im Folgenden darauf nicht eingegangen wird.

3. Für das weitere werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d\chi}{dt}=\chi' \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2\chi}{dt^2}=\chi'' \qquad \frac{d^3\chi}{dt^3}=\frac{d^3\chi}{dt^3}=\chi'''$$

Formel (D-87):

Behauptung:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\chi'}{\psi'}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 415, Formel $(6.59b)_1$

Formel (D-88):

Behauptung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi'\chi''-\chi'\psi''}{(\psi')^3}$$

Analyse:

»*Bronstein*«, S. 414, Formel $(6.59)_2$ steht

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\left[\varphi'(t)\right]^3}\left\{\varphi'(t)\frac{d^2y}{dx^2}-\varphi''(t)\frac{dy}{dx}\right\} \tag{1}$$

Werden in (1) φ durch ψ und y durch χ ersetzt, ergibt sich die Behauptung.

Formel (D-89):

Behauptung:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{\psi'}\frac{d\left(\frac{\psi'\chi''-\chi'\psi''}{\psi'^3}\right)}{dt}$$

Analyse:

Die Behauptung ist korrekt, denn es gilt für die zweite Ableitung durch Differenzieren von (D-89)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = -\frac{1}{\psi'}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'\kappa'' - \kappa'\psi''}{(\psi')^3}\right]\right\}$$

wobei für die zweite Ableitung $d^2y\,/\,dx^2$ das Ergebnis von (D-89) eingesetzt wird. Jedoch hat Musil diesen Ansatz nicht bis zu Ende ausgewertet. Denn dazu hätte er die angegebene Differentiation ausführen müssen. Das korrekte Ergebnis findet sich bei »*Bronstein*«, S. 415, Formel (6.59c). Es lautet in der Schreibweise von Musil

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{[\psi'(t)]^5}\left\{[\psi'(t)]^2\chi'''(t) - 3\psi'(t)\psi''(t)\chi''(t) + \left[3[\psi''(t)]^2 - \psi'(t)\psi'''(t)\right]\chi'(t)\right\}$$

Es lässt sich einfach durch Anwenden der Quotientenregel (DA-9) und der Produktregel (DA-8) zeigen, dass aus der Behauptung das Ergebnis nach »*Bronstein*« erhalten wird.

Abschlussbemerkung

Musil hat in den Formeln für die Berechnung von Differentialen zweiter und dritter Ordnung stets den gleichen Fehler gemacht, dass die zu differenzierende Größe in eine Klammer gezogen wurde, die von ihm quadriert wurde [vgl. z. B. (D-67)]. Dies ist ein fundamentaler Fehler, da dadurch im Ergebnis nichtlineare Terme auftreten, die bei dem linearen Prozess des Differenzierens nicht auftreten dürfen. Da dieser substanzielle Fehler wiederholt aufgetreten ist, kann es sich nicht um einen Übertragungs- oder Flüchtigkeitsfehler handeln. Dies zeigt einmal mehr, dass Musil kein Mathematiker war.