Franz Gustav Kollmann: *Transkription und Kommentare zu den von Musil im "Register"-Heft notierten Formeln. Kommentar zu den von Musil notierten Formeln zu Grenzwerten*. Akademie der Wissenschaften und der Literatur | Mainz (Hrsg.), 2017.
URN: urn:nbn:de:0238-musil-formeln-6-grenzwerte_4.

6. Kommentar zu den von Musil notierten Formeln zu Grenzwerten

Franz Gustav Kollmann
München

6.1. Grundlagen

Bei Grenzwerten wird zwischen Grenzwerten von Folgen und von Funktionen unterschieden. Eine unendliche Folge besteht $\{a_n\}$ aus unendlich vielen reellen Zahlen, die Elemente der Folge heißen. Jedes einzelne Glied a_n einer unendlichen Folge wird eindeutig durch seinen Index n gekennzeichnet. Für eine unendliche Folge durchläuft der Index n die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen $(1 \leq n \leq \infty)$. Für eine unendliche Folge kann deren Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ermittelt werden, sofern er existiert. Da Musil in Heft 37 Register nur Grenzwerte von Funktionen notiert hat, werden in diesem Kommentar Grenzwerte von Folgen nicht behandelt.

Nach »*Bronstein*«, S. 53, Abschnitt 2.1.4.1 gilt folgende Definition. Es sei eine Funktion $f(x)$ in einer Umgebung einer Stelle $x = a$ definiert, eventuell mit Ausnahme der Stelle $x = a$. Dann nimmt die Funktion an dieser Stelle den Grenzwert A an, der mit bezeichnet

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

wird, wenn es nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine zweite positive Zahl η derart gibt, dass für alle x mit $|x - a| < \eta$

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

gilt.

In der Mathematik kommt es häufig vor, dass der Definitionsbereich der Funktion unbeschränkt ist, d. h. dass die zulässigen Werte von x in dem Bereich $-\infty \leq x \leq \infty$ liegen. Dann existiert für $x \to \infty$ der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

wenn für eine beliebig kleine Zahl ε eine positive Zahl N derart angeben lässt, dass für beliebige $x > N$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

gilt. Eine entsprechende Definition des Grenzwerts lässt sich angeben für $x \to -\infty$.

<u>Regel von L‘Hospital</u>

Bei der Berechnung von Grenzwerten können unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ und $0 \cdot \infty$ vorkommen. Dann führt häufig die Regel von L‘Hospital (vgl. »*Bronstein*«, S. 56, Abschnitt 2.1.4.8 Abschnitt 2) zum Erfolg. Sie wird für die Fälle von Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ angegeben. Es sei mit gegebenen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eine Funktion $f(x)$ wie folgt definiert

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

Ferner seien

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} \qquad \text{und} \qquad \psi' = \frac{d\psi}{dx}$$

die ersten Ableitungen[1] der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$. Wenn an der Stelle $x = a$ die Funktion $f(x)$ durch Bildung des Grenzwertes Ausdrücke der unbestimmten Form

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi(x)} = \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$

liefert, dann kann der Grenzwert wie folgt berechnet werden.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi'(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi'(x)} \tag{GA-1}$$

[1] Vgl. zum Begriff der Ableitung Abschnitt 7.1 zum Kapitel „Differenzialquotienten“ dieses Kommentars.

Es ist erforderlich, dass $\psi'(a) \neq 0$ ist. Der Prozess nach (GA-1) heißt Anwendung der Regel von L‘Hospital. Sofern sich gemäß (GA-1) immer noch ein unbestimmter Ausdruck ergibt, wird der Prozess der Regel von L‘Hospital durch Bildung der zweiten, dritten,…*n*-ten Ableitungen so lange fortgesetzt, bis sich ein bestimmter Ausdruck ergibt.

6.2 Logarithmen

Es sei $b > 0\, b \neq 1$ eine beliebige reelle Zahl. Der Logarithmus einer positiven reellen Zahl $x > 0$ zur Basis b wird mit $\log_b x := a$ bezeichnet. Nach »*Bronstein*«, S. 9, (1.18a) gilt

$$\boxed{b^a = x} \tag{GA-2}$$

und nach »*Bronstein*«, S. 9, (1.18b) ergibt sich der Logarithmus der Zahl *x* zur Basis *b*.

$$\log_b x = a \tag{GA-3}$$

In der Mathematik gibt es zwei sehr häufig angewendete Basen und diesen speziellen Basen zugeordnete Logarithmen.

Dekadische Logarithmen mit der Basis $b = 10$. Für sie wird nach »*Bronstein*«, S. 9, (1.21) vereinfachend geschrieben

$$\log_{10} x = \lg x$$

Da Musil keine Formeln mit dekadischen Logarithmen notiert hat, wird auf diese hier nicht weiter eingegangen.

Natürliche Logarithmen mit der Basis $e = 2{,}718281828\ldots$. Die Zahl e ist irrational und heißt Eulersche Zahl. Der natürliche Logarithmus einer positiven reellen Zahl x wird mit $\ln x$ bezeichnet.

$$\log_e x = \ln x \tag{GA-4}$$

Bei Musil kommen entweder natürliche Logarithmen oder Logarithmen zu einer beliebigen Basis b vor. Musil verwendet für die natürlichen Logarithmen ein großes geschwungenes „L“. Diese Schreibweise ist vollkommen ungebräuchlich und kann in der Transkription nicht dargestellt werden. Diese Schreibweise findet sich bei dem bekannten Mathematiker Oskar Schlömilch[2] (1823 - 1901)

Wichtig sind folgende Rechenregeln für Logarithmen mit beliebiger Basis b, s. »*Bronstein*«, S. 9, (1.18c) mit (1.19b).

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b 0 = \begin{cases} -\infty & \text{für } b > 1 \\ \infty & \text{für } b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y \tag{GA-5}$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y \tag{GA-6}$$

Die Umrechnung von Logarithmen zur Basis b in Logarithmen zur Basis a erfolgt nach »*Bronstein*«, S. 9, (1.20) gemäß

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = M \log_b x \text{ mit } M := \frac{1}{\log_b a} \tag{GA-7}$$

Die Größe M wird auch als Transformationsmodul bezeichnet.

6.3 Formeln von Musil

Musil gibt zunächst einige allgemeine Formeln für die Berechnung von Grenzwerten an. Sodann folgen Formeln für spezielle Grenzwerte.

6.3.1 Allgemeine Formeln

In den Formeln (G-1) mit (G-9) gibt Musil einige allgemeine Formeln zur Berechnung von Grenzwerten an. Allerdings ist seine Schreibweise mathematisch nicht präzise.

Formel (G-1):

Behauptung:

$$\lim\left(\Phi_n \pm \Psi_n\right) = \Phi \pm \Psi = \lim \Phi_n \pm \lim \Psi_n \tag{G-1}$$

[2] Oskar Schlömilch, Handbuch der Differenzial- und Integralrechnung, Erster Theil, Greifswald, 1847, S. XI und ders. Compendium der Höheren Analysis, Braunschweig, 1853, S. 21

Bemerkung:

In (G-1) bleibt offen, ob es sich bei den Größen Φ_n und Ψ_n um Glieder einer Folge oder aber um Funktionen (deren unabhängige Variable nicht angegeben wird) handelt. Da Musil ab Gl. (G-8) ausschließlich Grenzwerte von Funktionen behandelt, wird vermutet, dass es sich auch bei den vorstehend aufgeführten Größen nicht um Glieder von Folgen sondern um Funktionen handelt. Weiter gibt Musil nicht an, an welcher Stelle (z. B. $x = a$) die Grenzwerte berechnet werden sollen. Der Index „*n*“ ist hierfür nicht aussagefähig. Die von Musil angegebene Reihenfolge ist insofern nicht sinnvoll, als die Größen Φ und Ψ die ermittelten Grenzwerte sind, die logischer Weise am Ende der Formel stehen müssen.

Nachweis:

Richtig lautet daher die Gl. (G-1) nach »*Bronstein*«, S. 55, (2.22) wie folgt.

$$\lim_{x\to a}\left[\Phi(x) \pm \Psi(x)\right] = \lim_{x\to a}\Phi(x) \pm \lim_{x\to a}\Psi(x) = \Phi \pm \Psi\,,$$

wobei die Beziehungen

$$\lim_{x\to a}\Phi(x) = \Phi \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a}\Psi(x) = \Psi$$

gelten.

Bei den Formeln (G-2) bis (G-7) erfolgen die Richtigstellungen im obigen Sinn kommentarlos.

Formel (G-2):

Behauptung:

$$\lim\left(\Phi_n \Psi_n\right) = \Phi\Psi = \lim\Phi_n \lim\Psi_n$$

Richtigstellung:

$$\lim_{x\to a}\left(\Phi(x)\cdot\Psi(x)\right) = \lim_{x\to a}\Phi(x)\cdot\lim_{x\to a}\Psi(x) = \Phi\cdot\Psi$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 55, (2.23)

Formel (G-3):

Behauptung:

$$\lim\left(\frac{\Phi_n}{\Psi_n}\right)=\frac{\Phi}{\Psi}=\frac{\lim\Phi_n}{\lim\Psi_n}$$

Richtigstellung:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}\Phi(x)}{\lim\limits_{x\to a}\Psi(x)}=\frac{\Phi}{\Psi}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 55, (2.24) mit der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{x\to a}\Psi(x)\neq 0$ ist.

Formel (G-4):

Behauptung:

$$\lim c\Phi_n = c\lim\Phi_n$$

Richtigstellung:

$$\lim_{x\to a}\left[c\cdot\Phi(x)\right]=c\cdot\lim_{x\to a}\Phi(x)$$

Nachweis: Folgt direkt aus »*Bronstein*«, S. 55, (2.21) mit $\Psi(x)=c$ und $c=\text{const}$.

Zwischenbemerkung:

Es ist zweckmäßig, zunächst die Formeln (G-8) und (G-9) zu kommentieren und anschließend die Formeln (G-5) mit (G-7). Denn diese sind Spezialfälle von (G9).

Formeln (G8-):

Die Formel (G-8) ist keine eigenständige Formel sondern eine Voraussetzung für (G-9).

Formel (G-9):

Behauptung:

Es sei $z = f\left[\varphi(x)\right]$ Funktion der unabhängigen Variablen *x*. Ferner sei $y = f(z)$ Funktion einer Variablen *z*, die ihrerseits eine Funktion $z = \varphi(x)$ der unabhängigen Variablen *x* ist. Ferner sei die Funktion $\varphi(x)$ an der Stelle $x = x_1$ stetig und besitze dort den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_1}\left[\varphi(x)\right] = \varphi(x_1) = z_1 \tag{G-8}$$

Schließlich sei die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = z_1$ stetig und besitze dort den Grenzwert

$$\lim_{z \to z_1} f(z) = f(z_1)$$

Dann gilt

$$\lim_{z \to z_1} f(z) = f\left[\lim_{x \to x_1} \varphi(x)\right] \tag{G-9}$$

Nachweis:

www.math.uni-sb.de/ag/wittstock/lehre/WS00/analysis1/Vorlesung/node43.html, aufgerufen am 17.11.2016, 10:01

Formel (G-10):

Behauptung:

$$\lim_{x \to x_1} f\left[\varphi(x)\right] = f\left[\lim_{x \to x_1} \varphi(x)\right]$$

Nachweis: Andere Schreibweise von (G-9), wobei die Definition $\lim_{x \to x_1} \varphi(x) = z_1$ verwendet wird.

Bemerkung: Die Aussage von Gl. (G-10) hat Musil wie folgt verbalisiert: Der Limes einer Funktion = Funktion des Limes. Dies muss wie folgt präzisiert werden:

Es sei eine Funktion $f(z)$ einer Variablen z gegeben, die ihrerseits Funktion $z=\varphi(x)$ einer weiteren Variablen x ist. Unter den Voraussetzungen, dass der Grenzwert $z_1=\lim\limits_{x\to x_1}\varphi(x)=\Phi$ existiert und die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z=z_1$ stetig ist, kann der Grenzwert der Funktion $f(z)$ an der Stelle $z=z_1$ als Funktion $f(\Phi)$ des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to x_1}\varphi(x)=\Phi$ berechnet werden.

Formel (G-5):

Behauptung:

$$\lim\log_b=\Phi_n=\log_b\lim\Phi_n$$

Nachweis: Spezialfall von Formel (G-9) mit $\varphi(x)=\log_b x$

Formel (G-6):

Behauptung:

$$\lim(\Phi_n)^{\lim\Psi_n}=(\lim\Phi_n)^{\lim\Psi_n}$$

Nachweis: Spezialfall von Formel (G-9) mit $z=\varphi(x)^{\psi(x)}$

Formel (G-7):

Behauptung:

Wenn $\lim\dfrac{\Phi_n}{\lim\Psi_n}=a$ ist, dann gilt

$$\lim\frac{\Phi_n}{\Psi_n}=\frac{1}{a}$$

Nachweis: Einfache Umkehrung von Formel (G-3)

6.3.2 Spezielle Grenzwerte

Vorbemerkung zu den Formeln (G-11) und Formel (G-12)$_1$:

Zunächst werden die Formeln (G-12) betrachtet, weil sich Formel (G-11) aus (G-12)$_1$ herleiten lässt.

Formel (G-12)$_1$:

Behauptung:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp a$$

Es werden die beiden folgenden Fälle unterschieden, wobei $\mathbb{N} = 1, 2, \ldots$ die Menge der natürlichen Zahlen ist.

Fall 1: $x \to \infty\ a \in \mathbb{N}$

Fall 2: $x \to -\infty,\ a \in \mathbb{N}$

Nachweis für Fall 1:

Diese Formel findet sich z. B. in

http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Exp/09/01/
aufgerufen am 17.11.2016, 10:10

Es wird noch angemerkt, dass (D-12)$_1$ für alle reellen Werte der Größe *a* und damit für negative Werte von a<0 gültig ist.

Beweis von Fall 2: $x \to -\infty$

Setze $a = -b$. Dann folgt aus der Behauptung für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{b}{x}\right)^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x}\right)^x} = \frac{1}{\exp(b)} = \exp a$$

Formel (G-12)$_2$:

Behauptung.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$$

Beweis:

Anwendung der Regel (GA-1) von L'Hospital liefert mit der Ableitung des natürlichen Logarithmus

$$\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$$

und der Kettenregel (DA-7) (vgl. hierzu Abschnitt 5.1.3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=1$$

Formel (G-11):

Behauptung:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Nachweis: Diese Formel ergibt sich als Sonderfall für $a=1$ aus Formel (G-12)$_{1.}$

Formel (G-13)$_1$:

Behauptung:

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}=\exp a$$

Beweis:

Die Substitution

$$\frac{1}{x}:=z$$

liefert

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \exp a$$

wobei Formel $(G\text{-}12)_1$ berücksichtigt wurde.

Formel $(G\text{-}13)_2$:

Behauptung:

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^x - 1}{x} = \ln b$$

Beweis:

Nach Formeln (GA-2) und (GA-3) lässt sich b^x mit Hilfe des natürlichen Logarithmus darstellen als

$$b^x = (\exp\ln b)^x = \exp(x\ln b) \qquad (1)$$

Der eigentliche Beweis erfolgt mit der Regel (GA-1) von L'Hospital. Für ihre Anwendung werden die Ableitung (DA-9) (vgl. Abschnitt 5.1.3) der Exponentialfunktion $\exp x$ und die Kettenregel (DA-7) benötigt. Durch Einsetzen von (1) in die Behauptung und darauf folgender Anwendung der Regel (GA-1) von L'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x\ln b) - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln b\exp(x\ln b)}{1} = \ln b$$

Formel $(G\text{-}14)_1$:

Behauptung:

$$\lim_{x\to x_1}\frac{\log_b(1+ax)}{x} = \frac{a}{\ln b}$$

Beweis:

Zunächst wird der Logarithmus zur Basis b mit Hilfe von Gl. (GA-7) in den entsprechenden natürlichen Logarithmus umgerechnet.

$$\log_b(1+ax) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln b}$$

Damit wird aus der Behauptung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_b(1+ax)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x\ln b}$$

Als nächstes wird die Regel von L'Hospital angewendet. Dazu wird die Ableitung des Zählers benötigt, die hier ohne Beweis mitgeteilt wird [vgl. hierzu Kommentar zu Formel (D-25)$_1$]

$$\frac{d\ln(1+ax)}{dx} = \frac{a}{1+ax} \tag{1}$$

Die Anwendung der Regel (GA-1) von L'Hospital liefert schließlich

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x\ln b} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a}{1+ax}}{\ln b} = \frac{a}{\ln b}$$

<u>Formel (G-14)$_2$:</u>

<u>Behauptung:</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\exp x - 1} = 1$$

<u>Beweis:</u>

Um die Regel (GA-1) von L'Hospital anwenden zu können, wird die Ableitung der Funktion $\exp x$ benötigt. Mit (DA-9) und (GA-1) folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\exp x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\exp x} = 1$$

Formel (G-15)$_1$:

Behauptung:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_b(1+x)}=\ln b$$

Beweis:

Zunächst wird mit (GA-7) der im Nenner stehenden Logarithmus zur Basis b auf den natürlichen Logarithmus umgerechnet.

$$\log_b(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln b}$$

Damit nimmt die Behauptung folgende Form an

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_b(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln bx}{\ln(1+x)} \tag{1}$$

Auf (1) wird die Regel von L'Hospital angewendet, wobei für die Ableitung des Nenners Gl. (1) aus dem Beweis von Formel (G-14)$_1$ mit $a=1$ angewendet wird

$$\frac{d\ln(1+x)}{dx}=\frac{1}{x} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt mit der Regel von L´Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_b(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln bx}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln b}{\frac{1}{1+x}}=\ln b$$

Damit ist (G-15)$_1$ bewiesen.

Formel (G-15)$_2$:

Behauptung:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

Beweis:

Setze $z := 1 + x$. Die Ableitung von z^m, wobei z eine beliebige reelle Zahl ist, ergibt sich nach »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 zu

$$\frac{dz^m}{dz} = mz^{m-1} \tag{1}$$

Die Ableitung nach x wird mit Hilfe der Kettenregel »*Bronstein*«, S. 397, (6.9) berechnet

$$\frac{d(1+x)^m}{dx} = m(1+x)^{m-1}$$

Damit folgt nach der Regel (GA-1) von L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^m}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{m(1+x)^{m-1}}{1} = m$$

Formel (G-16)$_1$:

Behauptung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Beweis:

Setze in Formel (G-14)$_1$ $b = e$ (Übergang von dem Logarithmus zur Basis b zum natürlichen Logarithmus) und $a = 1$ und erhalte unter Beachtung von $\ln e = 1$ die Behauptung.

Formel (G-16)$_2$:

Behauptung:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k^n}{n!} = 0$$

Beweis:

Die Zahl n muss eine natürliche Zahl sein, da sonst die Fakultät $n!$ nicht auf elementare Weise gemäß (AH-4) definiert werden kann. Ferner wird vorausgesetzt, dass $0 < k < \infty$ eine beschränkte positive Zahl ist Diese Voraussetzung fehlt bei Musil. Es sind 3 Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $0 < k < 1$

Setze $k = 1/s$. Dann ist die Zahl $s > 1$ und daher verschwindet bereits der Zähler der Behauptung für $n \to \infty$ und erst recht der Gesamtausdruck der Behauptung, da

$$\lim_{n\to\infty} n! \to \infty \tag{1}$$

Für Fall 1 ist daher die Behauptung korrekt.

Fall 2: $k = 1$

Die Behauptung ist trivial. Denn für $k = 1$ gilt für den Zähler

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

und für den Nenner nach (1)

$$\lim_{n\to\infty} n! \to \infty$$

Fall 3: $k > 1$

Zunächst wird gezeigt, dass der Grenzwert nicht mit Hilfe der Regel von L'Hospital berechnet werden kann. Gemäß der Definition (AH-4) der Fakultät $n!$ gilt mit »*Bronstein*«, S. 395, (6.5)

$$\frac{dn!}{dn} = (n-1)! \tag{2}$$

Weiter gilt

$$k^n = \exp(n \ln k) \tag{3}$$

Mit »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 folgt

$$\frac{dk^n}{dn} = \ln k \exp(n \ln k) = k^n \ln k \tag{4}$$

Mit den Gln. (2) und (4) liefert die Regel (GA-1) von L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n\ln k}{(n-1)!} \tag{5}$$

Beim Grenzübergang $n\to\infty$ liefert Gl. (5) also nach wie vor einen unbestimmten Ausdruck der Form ∞/∞. Die Anwendung der Regel von L`Hospital kann beliebig oft fortgesetzt werden, ohne dass sich dieses Ergebnis ändert.

Abhilfe schafft die Formel von Stirling, »*Bronstein*«, S. 479, (8.107b), welche eine für $n>10$ gültige Näherung der Fakultät liefert

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\cdots\right) \tag{6}$$

Das Zeichen $\approx$ bedeutet „ungefähr gleich“. Für $n\to\infty$ wird aus Gl. (6) folgende asymptotische Näherung[3] gewonnen, weil die Brüche in der Klammer gegen Null gehen

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}=n^n\exp(-n)\sqrt{2\pi n}\approx \tag{7}$$

Dabei ist die Umformung auf der rechten Seite von (7) exakt. Weiter gilt

$$n^n=\exp(n\ln n)$$

Damit wird aus Gl. (7)

$$n!\simeq n^n\exp(-n)\sqrt{2\pi n}=\exp\left[n(\ln n-1)\right]\sqrt{2\pi n} \tag{8}$$

Durch Einsetzen der Gln. (3) und (8) in die Behauptung folgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\exp\left[n(\ln k+1-\ln n)\right]}{\sqrt{2\pi n}} \tag{9}$$

Das Verhalten des Grenzwertes in (9) hängt vom Vorzeichen des Exponentialausdrucks im Zähler ab. Für Werte $\ln k+1>\ln n>0$ ist das Vorzeichen des Exponenten positiv. Diese Bedingung ist äquivalent mit $ek>n$. Da $k>1$ voraussetzungsgemäß eine endliche Zahl ist, kehrt sich mit anwachsendem n das Vorzeichen des Exponenten im Zähler von (9) um und es wird negativ $n(\ln k+1-\ln n)<0$ und daher geht bereits die Exponentialfunktion im Zähler für $n\to\infty$ exponentiell gegen 0.

[3] Eine asymptotische Näherung einer Funktion *f(x)* verhält sich für Werte $x\geq M$, wobei M eine festgelegte positive reelle Zahl ist, wie die Funktion *f(x)*.

Dieses Verhalten wird durch den über alle Grenzen anwachsenden Nenner verstärkt, womit die Richtigkeit von (G-16) für alle zulässigen Werte $0 < k < \infty$ bestätigt ist.

Zusammenfassung

Die Behauptung gilt für beliebige Werte $0 < k < \infty$ der reellen positiven Zahl *k*.

Formel (G-17)$_1$:

Behauptung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt am einfachsten mit der Regel (GA-1) von L'Hospital. Nach »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 gilt

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \tag{1}$$

und

$$\frac{dx}{dx} = 1 \tag{2}$$

Anwendung der Regel (GA-1) von L'Hospital und anschließendes Einsetzen von Gln. (1) und (2) führt auf

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} \tag{3}$$

Da nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3 $\cos 0 = 1$ ist, ergibt sich aus Gl. (3) die Behauptung.

Formel (G-17)$_2$:

Behauptung:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{(1+\delta)^{\mu} - 1}{\delta} = \mu$$

Beweis:

Der Grenzwert wird mit Hilfe der Regel (GA-1) von L'Hospital berechnet. Der Zähler der Behauptung wird gleich

$$z(\delta) := (1+\delta)^{\mu} \qquad (1)$$

gesetzt. Mit der Kettenregel der Differentialrechnung [vgl. »*Bronstein*«, S.397, (6.9)] und »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1, Spalten 1 und 2, Zeile 3 ergibt sich aus (1)

$$\frac{dz}{d\delta} = \mu(1+\delta)^{\mu-1} \qquad (2)$$

Nach »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 ist

$$\frac{d\delta}{d\delta} = 1$$

und daher folgt aus der Regel (GA-1) von L'Hospital durch Einsetzen von (1) und (2)

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\mu(1+\delta)^{\mu-1}}{1} = \mu$$

Formel (G-18):

Behauptung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Beweis:

Er erfolgt mit Hilfe der Regel (GA-1) von L'Hospital. Aus »*Bronstein*«, S. 396, Tabelle 6.1 wird entnommen

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{für } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k = 1,2,3,\ldots \qquad (1)$$

Die in Gl. (1) ausgeschlossenen Werte von x werden beim Grenzübergang $x \to 0$ nicht angenommen. Da nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3 $\cos 0 = 1$ ist, folgt mit den Gln. (GA-1) und (1) die Behauptung.