

## 5. Kommentar zu den Formeln zu Kettenbrüchen

Franz Gustav Kollmann  
München

### 5.1 Mathematische Definition von Kettenbrüchen

Kettenbrüche werden nach Perron<sup>1</sup> allgemein wie folgt definiert

$$K = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}} \quad (1)$$

Die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{\nu}, \dots, a_n$  und  $b_0, b_1, \dots, b_{\nu}, \dots, b_n$ , mit den allgemeinen Koeffizienten  $a_{\nu}$  und  $b_{\nu}$  werden mit Hilfe der natürlichen Zahlen<sup>2</sup>  $0 \leq \nu \leq n$  indiziert. Es wird vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten  $a_{\nu}$  und  $b_{\nu}$  ganze Zahlen<sup>3</sup> sind.

Die beiden folgenden Fälle werden unterschieden:

- $n$  ist eine natürliche Zahl ( $n < \infty$ ). Dann heißt der Kettenbruch  $K$  endlicher Kettenbruch.
- Sofern  $n \rightarrow \infty$  geht, heißt der Kettenbruch  $K$  unendlicher Kettenbruch.

Jeder endliche Kettenbruch lässt sich durch einfache algebraische Operationen in einen gewöhnlichen Bruch  $A/B$  umwandeln<sup>4</sup>.

Endliche Kettenbrüche, bei denen alle Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = 1$  und die Teilnenner  $b_1, b_2, \dots, b_n$  natürliche Zahlen sind - die Zahl  $b_0$  darf eine beliebige, ganze Zahl sein -, heißen endliche regelmäßige Kettenbrüche<sup>5</sup>.

Für endliche regelmäßige Kettenbrüche hat Muir eine symbolische Notation eingeführt:

$$K = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] \quad (2)$$

### 5.2 Musils Formeln zu Kettenbrüchen

<sup>1</sup> Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig: Teubner 1913.

<sup>2</sup> Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen 1, 2, 3...

<sup>3</sup> Die ganzen Zahlen sind ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...

<sup>4</sup> Perron, a.a.O. S. 4 ff.

<sup>5</sup> Perron, a.a.O. S. 28.

Zunächst ist festzuhalten, dass Musil Formeln ausschließlich zu endlichen Kettenbrüchen notiert hat.

Es lässt sich zeigen<sup>6</sup>, dass alle von Musil zu den Kettenbrüchen notierten Formeln 1:1 aus dem Buch von Perron übernommen wurden. Dazu werden in der folgenden Tabelle die korrespondierenden Notationen nach Musil und Perron angegeben.

Tabelle 1 Notationen zu Kettenbrüchen

Bezeichnung	Notation nach Musil	Notation nach Perron
Koeffizienten	$q_s \quad s = 0, 1, 2, \dots, n$	$b_\nu \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n$
Kettenbruch 0-ter, 1.-ter, ..., n-ter Näherung	$K_s = \frac{Z_s}{N_s}, s = 0, 1, 2, \dots, n$	$\frac{A_\nu}{B_\nu}, \nu = 0, 1, 2, \dots, n$

In Gl. (1) von Perron treten ferner Koeffizienten  $a_\nu$  auf, die gleich 1 ( $a_\nu = 1$ ) gesetzt werden müssen, da Musil sich auf endliche regelmäßige Kettenbrüche beschränkt hat. Anstelle des Index  $\nu$  findet sich bei Perron auch der Index  $\lambda$ . Die in Tabelle 1 aufgeführten Bezeichnungen verwendet Musil ab seiner Formel (K-3).

### Formel (K-1):

#### Behauptung:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}} = K(q, q_1, \dots, q_n)$$

#### Analyse:

Die Formel (K-1) ergibt sich aus (1), indem  $b_i = q_i \quad i = 1, 2, \dots, n$  und alle Koeffizienten  $a_i \equiv Z_i = 1$  gesetzt werden.

#### Bemerkungen:

1. Bei (K-1) handelt es sich um die Definitionsgleichung eines endlichen, regelmäßigen Kettenbruchs.
2. Bei Musil fehlen allerdings folgende Hinweise:
  - a. Er gibt nicht an, dass er sich auf endliche regelmäßige Kettenbrüche beschränkt.
  - b. Er gibt nicht an, dass die Koeffizienten  $b_1, b_2, \dots, b_n$  positive ganze Zahlen sein müssen [vgl. hierzu die Analyse von (K-5)<sub>2</sub>].

<sup>6</sup> Franz Gustav Kollmann, Zur Datierung der von Musil notierten mathematischen Formeln und deren Richtigkeit, Musil Forum, Bd. 30, 2007/2008, S. 1 – 19.

3. Formel K-1) kann nicht bewiesen werden, weil es sich bei ihr um die Definitionsgleichung eines endlichen, regelmäßigen Kettenbruchs handelt.

### Formel (K-2):

#### Behauptung:

$$\frac{b}{a} = K_1 = \frac{1}{K} = K_1(0, q, q_1 \dots q_n)$$

#### Analyse:

(K-2) ist einfach der Kehrwert von (K-1).

### **Vorbemerkung zu den Formeln (K-3) mit (K-9):**

Jeder endliche Kettenbruch kann in einen echten Bruch umgewandelt werden. In den Formeln werden Näherungsbrüche berechnet, bei denen nicht alle Terme im Nenner mitgenommen sondern bei einer Ordnung  $s < n$  abgebrochen wird. Dementsprechend ergibt sich ein Näherungsbruch  $K_s$  von der Ordnung  $s$ .

### Formel (K-3)

#### Bemerkungen:

Die Formel (K-3) besteht aus zwei zusammengehörenden Formeln.

#### Behauptung:

$$K_s = \frac{q_s \cdot Z_{s-1} + Z_{s-2}}{q_s N_{s-1} + N_{s-2}} = \frac{Z_s}{N_s} \quad (\text{K-3})_1$$

$$Z_s = q_s Z_{s-1} + Z_{s-2}; \quad N_s = q_s N_{s-1} + N_{s-2} \quad (\text{K-3})_2$$

Bei den beiden Formeln (K-3)<sub>1</sub> und (K-3)<sub>2</sub> handelt es sich um Rekursionsformeln, mit deren Hilfe die Näherung  $K_s$  aus den beiden vorhergehenden, als bekannt vorausgesetzten Näherungen  $K_{s-1}$  und  $K_{s-2}$  bzw. den Näherungen für deren Zähler  $Z_{s-1}$  und  $Z_{s-2}$  sowie der Nenner  $N_{s-1}$  und  $N_{s-2}$  berechnet werden kann.

Die Anordnung der beiden Formeln (K-3)<sub>1</sub> und (K-3)<sub>2</sub> ist bei Musil nicht zweckmäßig. Konsequenter ist es, zuerst die beiden Rekursionsformeln (K-3)<sub>2</sub> für die  $s$ -te Näherung des Zählers  $Z_s$  bzw. des Nenners  $N_s$  und dann erst die Rekursionsformel (K-3)<sub>1</sub> für die Berechnung der  $s$ -ten Näherung des Kettenbruchs anzugeben. Musil verfährt umgekehrt.

#### Nachweis:

Nach »Perron«, S. 7, Gl. (7) gelten folgende Näherungen für den Zähler und Nenner

$$\text{Zähler: } A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} \quad \nu \geq 2$$

$$\text{Nenner: } B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}$$

Zusätzlich gibt Perron folgende Startwerte für die Berechnung an.

$$A_{-1} = 1 \quad B_{-1} = 0$$

$$A_1 = b_0 b_1 + a_1 \quad B_1 = b_1 \quad (1)$$

$$A_2 = b_2 A_1 + a_2 b_0 \quad B_2 = b_1 b_2 + a_2$$

Für den von Musil behandelten Spezialfall sind alle Größen  $a_\nu = 1$  zu setzen. Unter Beachtung der Korrespondenztabelle 1 lassen sich Perrons Gleichungen genau in die Gl. (K-3)<sub>2</sub> von Musil umwandeln. Gl. (K-3)<sub>1</sub> folgt direkt aus der bei Perron S. 7 nach der dortigen Gl. (7) ohne Nummer stehenden Gleichung

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}$$

indem alle  $a_\nu = 1$  gesetzt werden und Tabelle 1 angewendet wird.

#### Bemerkung:

Bei Musil fehlen die Startwerte nach Gleichung (1), ohne die die rekursive Berechnung mittels der Formeln (K-3)<sub>1</sub> und (K-3)<sub>2</sub> nicht durchgeführt werden kann.

#### Formel (K-4):

#### Behauptung:

$$N_s \cdot Z_{s-1} - Z_s N_{s-1} = (-1)^s$$

#### Analyse:

Bei »Perron«, S. 16, Gl. (31) findet sich, indem dort alle  $a_i = 1 \quad 1 \leq i \leq \lambda$  gesetzt werden der folgende Ausdruck

$$\frac{A_\lambda}{B_\lambda} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = (-1)^\lambda \frac{1}{B_{\lambda-1} B_\lambda} \quad (1)$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit  $B_{\lambda-1} B_\lambda$  auf beiden Seiten von (1)

$$A_{\lambda} B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_{\lambda} = (-1)^{\lambda} \quad (2)$$

Die Übersetzung mit Hilfe von Tabelle 1 liefert in Musils Notation

$$Z_s N_{s-1} - Z_{s-1} N_s = (-1)^s \quad (3)$$

Dies ist nicht identisch mit der Behauptung (K-4). Vielmehr müssen in der Behauptung auf der linken Seite die Vorzeichen vertauscht werden, damit dort der richtige Ausdruck  $Z_s N_{s-1} - Z_{s-1} N_s$  anstelle von Musils Ausdruck  $N_s Z_{s-1} - Z_s N_{s-1}$  steht. Offensichtlich ist Musil beim Abschreiben von Perron dieser Vorzeichenfehler auf der linken Seite der Behauptung (K-4) unterlaufen.

### **Formel (K-5):**

Behauptung:

$$K_{s+1} - K_s = \frac{(-1)^s}{N_s \cdot N_{s+1}} \quad (K-5)_1$$

$$|K_{s+1} - K_s| = \frac{1}{N_s \cdot N_{s+1}} \quad (K-5)_2$$

Analyse:

Gl. (K-5)<sub>1</sub> ist identisch mit »Perron«, S. 16, Gl. (31), wenn die Notation von Perron gemäß Tabelle 1 durch Musils Notation ersetzt wird, alle  $a_{\nu} = 1$  gesetzt werden und die Indizes  $\nu$  durch  $s+1$  und  $\nu-1$  durch  $s$  ersetzt werden, was wegen der Beliebigkeit der Indizes zulässig ist. Der zweite Teil ergibt sich durch Bildung des Betrages. Allerdings wird hierbei stillschweigend vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten<sup>7</sup>  $q_s > 0$  sind. Denn nur unter dieser Voraussetzung sind alle Näherungen  $N_s > 0$  und  $N_{s+1} > 0$  positiv. Wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, muss (K-5)<sub>2</sub> wie folgt korrigiert werden

$$|K_{s+1} - K_s| = \frac{1}{|N_s N_{s+1}|}$$

### **Formeln (K-6) mit (K-8):**

Die Formeln (K-6) mit (K-8) werden zusammen betrachtet.

Behauptungen:

$$K_0 < K_1, K_2 < K_3, K_4 < K_5 \dots K_s < K_{s+1} \quad \text{wenn } s \text{ gerade} \quad (K-6)$$

<sup>7</sup> Dieser Hinweis wäre nicht erforderlich, wenn Musil angegeben hätte, dass er sich auf endliche, regelmäßige Kettenbrüche beschränkt, da bei diesen definitionsgemäß alle Koeffizienten  $q_s$  natürliche Zahlen sind.

$$K_1 > K_2, K_3 > K_4 \dots K_s > K_{s+1} \dots \text{ wenn } s \text{ ungerade} \quad (\text{K-7})$$

$$K_0 < K_2 < K_4 < K_6 \dots \quad (\text{K-8})$$

$$K_1 > K_3 > K_5 > K_7 > \dots$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} K_0 < K_2 < K_1 \\ K_2 < K_3 < K_4 \\ K_4 < K_5 < K_3 \end{array} \right\} \text{ Jeder Näherungsbruch liegt zwischen seinen vorausgehenden Naherungsbruchen}$$

### Analyse:

Die Beziehungen (K-6) mit (K-8) ergeben sich aus »Perron«, S. 43, Beziehung (6)

$$\frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \frac{A_4}{B_4} < \dots \xi_{s_0} < \dots \frac{A_5}{B_5} < \frac{A_3}{B_3} < \frac{A_1}{B_1}$$

oder in der Notation von Musil<sup>8</sup>

$$K_0 < K_2 < K_4 < \dots < K < \dots < K_5 < K_3 < K_1 \quad (1)$$

Musil hat zu (1) folgende Skizze<sup>9</sup> angefertigt

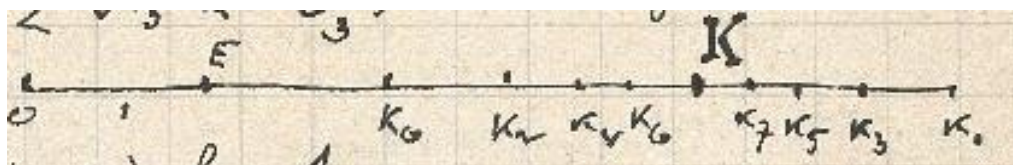


Abbildung 1: Musils Skizze zu Ungleichung(1)

Diese Skizze lässt sich wie folgt interpretieren. Dargestellt ist ein Abschnitt der positiven Zahlenachse ( $0 \leq s \leq \infty$ ), die sich vom Wert 0 bis Unendlich ( $\infty$ ) erstreckt. Die Skizze der positiven Zahlenachse beginnt links mit dem korrekten Wert 0. Dann folgt (klein geschrieben unter der Zahlengeraden) der Wert 1. Was der Wert *E* oberhalb der Zahlenachse bedeutet, kann nicht erschlossen werden. Oberhalb der Zahlenachse steht relativ groß und fett geschrieben der wahre Wert **K** des endlichen Kettenbruchs. Unterhalb der Zahlenachse stehen die Näherungswerte  $K_s$  und zwar links vom wahren Wert **K** die Näherungen  $K_0, K_2, K_4, K_6$  mit geraden Indizes  $s = 0, 2, 4, 6$ . Die Näherungen mit geraden Indizes sind alle kleiner als der wahre Wert **K**, wobei sich die Näherungswerte mit ansteigendem geraden Index  $s$  dem wahren Wert **K** immer besser annähern. Rechts vom wahren Wert **K** stehen die Näherungen  $K_s$  mit den Werten  $s$  in der Reihenfolge  $s = 7, 5, 3, 1$ . Dabei liegt der Näherungsbruch  $K_7$  mit dem größten Index  $s = 7$  am nächsten am wahren Wert **K**.

<sup>8</sup> Zu beachten ist, dass  $K=A/B$  der wahre Wert des betrachteten Kettenbruches ist.

<sup>9</sup> KA Registerheft 5

Aus Abbildung 1 lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Alle Näherungsbrüche mit geraden Indizes  $s = 0, 2, 4, 6, \dots$  sind kleiner als der wahre Wert  $K$ .
2. Alle Näherungsbrüche mit ungeraden Indizes  $s = 1, 3, 5, 7, \dots$  sind größer als der wahre Wert  $K$ .
3. Die Näherungen mit geraden, zunehmenden Indizes nähern sich dem wahren Wert  $K$  von unten an. Entsprechend nähern sich die Näherungen mit ungeraden, zunehmenden Indizes dem wahren Wert  $K$  von oben an. In der Sprache der Mathematik lässt sich dieser Sachverhalt knapp wie folgt formulieren. Die Näherungsbrüche mit geraden und ungeraden Indizes grenzen den wahren Wert  $K$  des Kettenbruchs mit zunehmenden Werten der Indizes von unten (gerade Indizes) und oben (ungerade Indizes) ein. Eine Ungleichung vom Typ der Beziehung (1) wird als eine geschachtelte Ungleichung bezeichnet.
4. Abbildung 1 zeigt, dass Musil die bei Perron stehende, von ihm nicht übernommene geschachtelte Ungleichung (1) richtig verstanden hat.

#### Bemerkungen:

1. Musil hat die geschachtelte Ungleichung (1) in einzelne Ungleichungen aufgelöst. Mathematisch gesehen besitzt die geschachtelte Ungleichung von Perron deutlich mehr Aussagekraft als die aufgelösten Ungleichungen nach Musil. Die Ungleichungen (K6) sind korrekt, wie sich leicht aus (1) ablesen lässt. Die ersten beiden Ungleichungen in (K-8) sind ebenfalls korrekt. Von den beiden nach dem Wort „oder“ stehenden drei Ungleichungen sind die erste und die dritte korrekt. Die zweite ist jedoch fehlerhaft. Denn aus (1) folgt, dass alle Näherungsbrüche  $K_s$  mit  $s = 2r$   $r = 1, 2, \dots$  mit geraden Indizes kleiner sind als solche mit ungeraden Indizes  $K_{2r-1}$  mit  $r = 1, 2, \dots$ . Daher ist  $K_2 < K_3 < K_4$  falsch<sup>10</sup>, denn nach (4) gilt  $K_4 < K_3$ . Der Autor (vgl. dazu Fußnote 6) hat zur Datierung des Formeleintrages in Heft 37 und zur Richtigkeit der im Abschnitt „Kettenbrüche“ von Musil notierten Formeln eine umfangreiche Studie vorgelegt, in der auf weitere Details eingegangen wird.
2. Die Aussage der geschachtelten Ungleichung (1) ist wesentlich inhaltsreicher und kompakter als Musils Gleichungen (K-6) mit (K-8). Es ist daher schwer verständlich, warum Musil nicht nur die korrekte geschachtelte Ungleichung (1) und die Skizze nach Abbildung 1 im Heft 37 Register aufgenommen hat.

#### Formel (K-9):

#### Behauptung:

$$|K_s - K| = f < \frac{1}{N_s^2}$$

Nachweis: »Perron«, S. 43, Gl. (9) mit Tabelle 1.

#### Abschlussbemerkungen:

---

<sup>10</sup> Kollmann, a. a. O., S. 10f

1. Alle von Musil zu endlichen regelmäßigen Kettenbrüchen angegebenen Formeln lassen sich auf die bei Perron enthaltenen Beziehungen zurückführen. Es sei noch bemerkt, dass die von Musil gewählte Notation sinnfälliger ist als die bei Perron, weil die Kernbuchstaben  $N$  und  $Z$  direkt auf „Nenner“ und „Zähler“ hinweisen, während Perron hierfür  $B$  bzw.  $A$  wählt. Ferner konnte ein Mann mit der mathematischen Vorbildung Musils (Studium des Maschinenbaus an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn, Studium der Mathematik im Nebenfach an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin) diesen Transfer von der Notation Perrons auf seine eigene mühelos leisten.
2. Weiter konnte durch eine Literaturrecherche im digitalen Katalog der TU Wien festgestellt werden, dass das Buch von Perron sich in dieser Bibliothek befindet, so dass es Musil während seiner dortigen Beschäftigung (1911 – 1913) zur Verfügung gestanden haben kann.
3. Schließlich wurde noch ein früheres Buch des Mathematikers Felix Klein<sup>11</sup> ermittelt, das einen Teil der von Perron angegebenen Formeln enthält. Dieses Buch befindet sich jedoch nicht in der Bibliothek der Technischen Universität Wien, so dass es mit sehr großer Wahrscheinlichkeit als Informationsquelle für Musil ausscheidet.
4. Daher ist festzuhalten, dass aus den Untersuchungen von Kollmann<sup>12</sup> sich als TAQUN für den Eintrag der Formeln zu den Kettenbrüchen in das Heft 37 aus Musils Nachlass das Jahr 1913 (Erscheinungsjahr des Buches von Perron) ergibt. Da die rund 312 von Musil notierten Formeln<sup>13</sup> sich auf hinter einander liegenden Seiten befinden, kann davon ausgegangen werden, dass diese zeitlich zusammenhängend von Musil notiert wurden. Es gibt in Heft 37 Register keinerlei Hinweise, dass Musil die einzelnen Kapitel der Formeln nicht in chronologischer Reihenfolge notiert hat. Schließlich ist als TPQN der August 1914 zu vermuten, da Musil nach seinem Einrücken am 20. August 1914 als Leutnant der Reserve zum Landsturm in Linz wohl kaum mehr Zeit gehabt hat, sich mit mathematischen Formeln zu beschäftigen.

---

<sup>11</sup> Klein, Felix: Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I, Göttingen 1896.

<sup>12</sup> Kollmann, a.a. O. S. 36f.

<sup>13</sup> Vgl. zur Anzahl der von Musil notierten Formeln. Tabelle 1 in dem Kapitel „Einleitung“ zu diesem Kommentar.