Franz Gustav Kollmann: *Transkription und Kommentare zu den von Musil im "Register"-Heft notierten Formeln. Kommentar zu den Formeln zu Kettenbrüchen*. Akademie der Wissenschaften und der Literatur | Mainz (Hrsg.), 2017.
URN: urn:nbn:de:0238-musil-formeln-5-kettenbrueche_4.

5. Kommentar zu den Formeln zu Kettenbrüchen

Franz Gustav Kollmann
München

5.1 Mathematische Definition von Kettenbrüchen

Kettenbrüche werden nach Perron[1] allgemein wie folgt definiert

$$K = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}} \tag{1}$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_\nu, \ldots a_n$ und $b_0, b_1, \ldots b_\nu, \ldots b_n$, mit den allgemeinen Koeffizienten a_ν und b_ν werden mit Hilfe der natürlichen Zahlen[2] $0 \le \nu \le n$ indiziert. Es wird vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten a_ν und b_ν ganze Zahlen[3] sind.

Die beiden folgenden Fälle werden unterschieden:

- n ist eine natürliche Zahl $(n < \infty)$. Dann heißt der Kettenbruch K *endlicher Kettenbruch*.
- Sofern $n \to \infty$ geht, heißt der Kettenbruch K *unendlicher Kettenbruch*.

Jeder endliche Kettenbruch lässt sich durch einfache algebraische Operationen in einen gewöhnlichen Bruch A / B umwandeln[4].

Endliche Kettenbrüche, bei denen alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n = 1$ und die Teilnenner $b_1, b_2, \ldots, b_n$ natürliche Zahlen sind - die Zahl b_0 darf eine beliebige, ganze Zahl sein -, heißen *endliche regelmäßige Kettenbrüche*[5].

Für endliche regelmäßige Kettenbrüche hat Muir eine symbolische Notation eingeführt:

$$K = \left[b_0, b_1, b_{2,} \ldots, b_n \right] \tag{2}$$

5.2 Musils Formeln zu Kettenbrüchen

[1] Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig: Teubner 1913.
[2] Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen 1, 2, 3…
[3] Die ganzen Zahlen sind …-3, -2, -1, 0, 1. 2, 3…
[4] Perron, a.a.O. S. 4 ff.
[5] Perron, a.a.O. S. 28.

Zunächst ist festzuhalten, dass Musil Formeln ausschließlich zu endlichen Kettenbrüchen notiert hat.

Es lässt sich zeigen[6], dass alle von Musil zu den Kettenbrüchen notierten Formeln 1:1 aus dem Buch von Perron übernommen wurden. Dazu werden in der folgenden Tabelle die korrespondierenden Notationen nach Musil und Perron angegeben.

Tabelle 1 Notationen zu Kettenbrüchen

Bezeichnung	*Notation nach Musil*	*Notation nach Perron*
Koeffizienten	$q_s \quad s = 0,1,2,\ldots n$	$b_\nu \quad \nu = 0,1,2,\ldots n$
Kettenbruch 0-ter, 1.-ter,...,n-ter Näherung	$K_s = \frac{Z_s}{N_s}, s = 0,1,2,\ldots,n$	$\frac{A_\nu}{B_\nu}, \nu = 0,1,2,\ldots,n$

In Gl. (1) von Perron treten ferner Koeffizienten a_ν auf, die gleich 1 $(a_\nu = 1)$ gesetzt werden müssen, da Musil sich auf endliche regelmäßige Kettenbrüche beschränkt hat. Anstelle des Index ν findet sich bei Perron auch der Index λ . Die in Tabelle 1 aufgeführten Bezeichnungen verwendet Musil ab seiner Formel (K-3).

Formel (K-1):

Behauptung:

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}} = K(q, q_1, \ldots q_n)$$

Analyse:

Die Formel (K-1) ergibt sich aus (1), indem $b_i = q_i \quad i = 1,2,\ldots n$ und alle Koeffizienten $a_i \equiv Z_i = 1$ gesetzt werden.

Bemerkungen:

1. Bei (K-1) handelt es sich um die Definitionsgleichung eines endlichen, regelmäßigen Kettenbruchs.
2. Bei Musil fehlen allerdings folgende Hinweise:
    a. Er gibt nicht an, dass er sich auf endliche regelmäßige Kettenbrüche beschränkt.
    b. Er gibt nicht an, dass die Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots, b_n$ positive ganze Zahlen sein müssen [vgl. hierzu die Analyse von $(K\text{-}5)_2$].

[6] Franz Gustav Kollmann, Zur Datierung der von Musil notierten mathematischen Formeln und deren Richtigkeit, Musil Forum, Bd. 30, 2007/2008, S. 1 – 19.

3. Formel K-1) kann nicht bewiesen werden, weil es sich bei ihr um die Definitionsgleichung eines endlichen, regelmäßigen Kettenbruchs handelt.

Formel (K-2):

Behauptung:

$$\frac{b}{a} = K_1 = \frac{1}{K} = K_1(0, q, q_1 \ldots q_n)$$

Analyse:

(K-2) ist einfach der Kehrwert von (K-1).

Vorbemerkung zu den Formeln (K-3) mit (K-9):

Jeder endliche Kettenbruch kann in einen echten Bruch umgewandelt werde. In den Formeln werden Näherungsbrüche berechnet, bei denen nicht alle Terme im Nenner mitgenommen sondern bei einer Ordnung $s < n$ abgebrochen wird. Dementsprechend ergibt sich ein Näherungsbruch K_s von der Ordnung s.

Formel (K-3)

Bemerkungen:

Die Formel (K-3) besteht aus zwei zusammen gehörenden Formeln.

Behauptung:

$$K_s = \frac{q_s \cdot Z_{s-1} + Z_{s-2}}{q_s N_{s-1} + N_{s-2}} = \frac{Z_s}{N_s} \qquad \text{(K-3)}_1$$

$$Z_s = q_s Z_{s-1} + Z_{s-2}\,; \quad N_s = q_s N_{s-1} + N_{s-2} \qquad \text{(K-3)}_2$$

Bei den beiden Formeln $(K\text{-}3)_1$ und $(K\text{-}3)_2$ handelt es sich um Rekursionsformeln, mit deren Hilfe die Näherung K_s aus den beiden vorhergehenden, als bekannt vorausgesetzten Näherungen K_{s-1} und K_{s-2} bzw. den Näherungen für deren Zähler Z_{s-1} und Z_{s-2} sowie der Nenner N_{s-1} und N_{s-2} berechnet werden kann.

Die Anordnung der beiden Formeln $(K\text{-}3)_1$ und $(K\text{-}3)_2$ ist bei Musil nicht zweckmäßig. Konsequent ist es, zuerst die beiden Rekursionsformeln $(K\text{-}3)_2$ für die *s*-te Näherung des Zählers Z_s bzw. des Nenners N_s und dann erst die Rekursionsformel $(K\text{-}3)_1$ für die Berechnung der *s*-ten Näherung des Kettenbruches anzugeben. Musil verfährt umgekehrt.

Nachweis:

Nach »*Perron*«, S. 7, Gl. (7) gelten folgende Näherungen für den Zähler und Nenner

Zähler: $A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} \quad \nu \geq 2$

Nenner: $B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}$

Zusätzlich gibt Perron folgende Startwerte für die Berechnung an.

$$A_{-1} = 1 \qquad B_{-1} = 0$$

$$A_1 = b_0 b_1 + a_1 \qquad B_1 = b_1 \qquad (1)$$

$$A_2 = b_2 A_1 + a_2 b_0 \qquad B_2 = b_1 b_2 + a_2$$

Für den von Musil behandelten Spezialfall sind alle Größen $a_\nu = 1$ zu setzen. Unter Beachtung der Korrespondenztabelle 1 lassen sich Perrons Gleichungen genau in die Gln. $(K\text{-}3)_2$ von Musil umwandeln. Gl. $(K\text{-}3)_1$ folgt direkt aus der bei Perron S. 7 nach der dortigen Gl. (7) ohne Nummer stehenden Gleichung

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}$$

indem alle $a_\nu = 1$ gesetzt werden und Tabelle 1 angewendet wird.

Bemerkung:

Bei Musil fehlen die Startwerte nach Gleichung (1), ohne die die rekursive Berechnung mittels der Formeln $(K\text{-}3)_1$ und $(K\text{-}3)_2$ nicht durchgeführt werden kann.

Formel (K-4):

Behauptung:

$$N_s \cdot Z_{s-1} - Z_s N_{s-1} = (-1)^s$$

Analyse:

Bei »*Perron*«, S. 16, Gl. (31) findet sich, indem dort alle $a_i = 1 \;\; 1 \leq i \leq \lambda$ gesetzt werden der folgende Ausdruck

$$\frac{A_\lambda}{B_\lambda} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = (-1)^\lambda \frac{1}{B_{\lambda-1} B_\lambda} \qquad (1)$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $B_{\lambda-1} B_\lambda$ auf beiden Seiten von (1)

$$A_\lambda B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_\lambda = (-1)^\lambda \tag{2}$$

Die Übersetzung mit Hilfe von Tabelle 1 liefert in Musils Notation

$$Z_s N_{s-1} - Z_{s-1} N_s = \left(-1\right)^s \tag{3}$$

Dies ist nicht identisch mit (K-4), weil links in (3) der Ausdruck $Z_s N_{s-1} - Z_{s-1} N_s$ anstelle von Musils Ausdruck $N_s Z_{s-1} - Z_s N_{s-1}$ steht. Offensichtlich hat Musil beim Abschreiben von Perron in seinem zweiten Ausdruck $-Z_s N_{s-1}$ die Indizes vertauscht. Der zweite Term in der linken Seite von (K-4) muss daher korrekt $Z_{s-1} N_s$ lauten.

<u>Formel (K-5):</u>

<u>Behauptung:</u>

$$K_{s+1} - K_s = \frac{(-1)^s}{N_s \cdot N_{s+1}} \tag*{(K-5)$_1$}$$

$$\left| K_{s+1} - K_s \right| = \frac{1}{N_s \cdot N_{s+1}} \tag*{(K-5)$_2$}$$

<u>Analyse:</u>

Gl. (K-5)$_1$ ist identisch mit »*Perron*«, S. 16, Gl. (31), wenn die Notation von Perron gemäß Tabelle 1 durch Musils Notation ersetzt wird, alle $a_\nu = 1$ gesetzt werden und die Indizes ν durch $s+1$ und $\nu - 1$ durch s ersetzt werden, was wegen der Beliebigkeit der Indizes zulässig ist. Der zweite Teil ergibt sich durch Bildung des Betrages. Allerdings wird hierbei stillschweigend vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten[7] $q_s > 0$ sind. Denn nur unter dieser Voraussetzung sind alle Näherungen $N_s > 0$ und $N_{s+1} > 0$ positiv. Wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, muss (K-5)$_2$ wie folgt korrigiert werden

$$\left| K_{s+1} - K_s \right| = \frac{1}{\left| N_s N_{s+1} \right|}$$

<u>Formeln (K-6) mit (K-8):</u>

Die Formeln (K-6) mit (K-8) werden zusammen betrachtet.

<u>Behauptungen:</u>

$$K_0 < K_1 \quad , K_2 < K_3 \quad , K_4 < K_5 \ldots K_s < K_{s+1} \; s \text{ gerade} \tag{K-6}$$

[7] Dieser Hinweis wäre nicht erforderlich, wenn Musil angegeben hätte, dass er sich auf endliche, regelmäßige Kettenbrüche beschränkt, da bei diesen definitionsgemäß alle Koeffizienten q_s *natürliche Zahlen sind.*

$K_1 > K_2, K_3 > K_4 \dots K_s > K_{s+1} \cdots\ s$ ungerade (K-7)

$K_0 < K_2 < K_4 < K_6 \cdots$ (K-8)

$K_1 > K_3 > K_5 > K_7 > \cdots$

oder

$\left.\begin{array}{l} K_0 < K_2 < K_1 \\ K_2 < K_3 < K_4 \\ K_4 < K_5 < K_3 \end{array}\right\}$ Jeder Näherungsbruch liegt zwischen seinen vorausgehenden Näherungsbrüchen

Analyse:

Die Beziehungen (K-6) mit (K-8) ergeben sich aus »*Perron*«, S. 43, Beziehung (6)

$$\frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \frac{A_4}{B_4} < \cdots \xi_0 < \cdots \frac{A_5}{B_5} < \frac{A_3}{B_3} < \frac{A_1}{B_1}$$

oder in der Notation von Musil[8]

$$K_0 < K_2 < K_4 < \dots < K < \dots < K_5 < K_3 < K_1 \qquad (1)$$

Musil hat zu (1) folgende Skizze[9] angefertigt

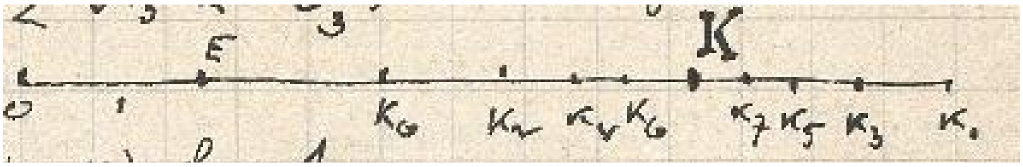

Abbildung 1: Musils Skizze zu Ungleichung(1)

Diese Skizze lässt sich wie folgt interpretieren. Dargestellt ist ein Abschnitt der positiven Zahlenachse $(0 \le s \le \infty)$, die sich vom Wert 0 bis Unendlich (∞) erstreckt. Die Skizze der positiven Zahlenachse beginnt links mit dem korrekten Wert 0. Dann folgt (klein geschrieben unter der Zahlengeraden) der Wert 1. Was der Wert *E* oberhalb der Zahlenachse bedeutet, kann nicht erschossen werden. Oberhalb der Zahlenachse steht relativ groß und fett geschrieben der wahre Wert ***K*** des endlichen Kettenbruchs. Unterhalb der Zahlenachse stehen die Näherungswerte K_s und zwar links vom wahren Wert ***K*** die Näherungen $K_0, K_2, K_{4,} K_6$ mit geraden Indizes $s = 0,2,4,6$. Die Näherungen mit geraden Indizes sind alle kleiner als der wahre Wert ***K***, wobei sich die Näherungswerte mit ansteigendem geraden Index *s* dem wahren Wert ***K*** immer besser annähern. Rechts vom wahren Wert K stehen die Näherungen K_s mit den Werten *s* in der Reihenfolge $s = 7,5,3,1$. Dabei liegt der Näherungsbruch K_7 mit dem größten Index $s = 7$ am nächsten am wahren Wert ***K***.

[8] Zu beachten ist, dass *K=A/B* der wahre Wert des betrachteten Kettenbruches ist.

[9] KA Registerheft 5

Aus Abbildung 1 lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Alle Näherungsbrüche mit geraden Indizes $s = 0,2,4,6,\ldots$ sind kleiner als der wahre Wert ***K***.
2. Alle Näherungsbrüche mit ungeraden Indizes $s = 1,3,5,7,\ldots$ sind größer als der wahre Wert ***K***:
3. Die Näherungen mit geraden, zunehmenden Indizes nähern sich dem wahren Wert ***K*** von unten an. Entsprechend nähern sich die Näherungen mit ungeraden, zunehmenden Indizes dem wahren Wert ***K*** von oben an. In der Sprache der Mathematik lässt sich dieser Sachverhalt knapp wie folgt formulieren. Die Näherungsbrüche mit geraden und ungeraden Indizes grenzen den wahren Wert K des Kettenbruchs mit zunehmenden Werten der Indizes von unten (gerade Indizes) und oben (ungerade Indizes) ein. Eine Ungleichung vom Typ der Beziehung (1) wird als eine geschachtelte Ungleichung bezeichnet.
4. Abbildung 1 zeigt, dass Musil die bei Perron stehende, von ihm nicht übernommene geschachtelte Ungleichung (1) vollkommen richtig verstanden hat.

Bemerkungen:

1. Musil hat die geschachtelte Ungleichung (1) in einzelne Ungleichungen aufgelöst. Mathematisch gesehen besitzt die geschachtelte Ungleichung von Perron deutlich mehr Aussagekraft als die aufgelösten Ungleichungen nach Musil. Die Ungleichungen (K6) und (K6) sind korrekt, wie sich leicht aus (1) ablesen lässt. Die ersten beiden Ungleichungen in (K-8) sind ebenfalls korrekt. Von den beiden nach dem Wort „oder" stehenden drei Ungleichungen sind die erste und die dritte korrekt. Die zweite ist jedoch fehlerhaft. Denn aus (1) folgt, dass alle Näherungsbrüche K_s mit $s = 2r \quad r = 1,2,\ldots$ mit geraden Indizes kleiner sind als solche mit ungeraden Indizes K_{2r-1} mit $r = 1,2,\ldots$. Daher ist $K_2 < K_3 < K_4$ falsch[10], denn nach (4) gilt $K_4 < K_3$. Der Autor (vgl. dazu Fußnote 6) hat zur Datierung des Formeleintrages in Heft 37 und zur Richtigkeit der im Abschnitt „Kettenbrüche" von Musil notierten Formeln eine umfangreiche Studie vorgelegt, in der auf weitere Details eingegangen wird.
2. Die Aussage der geschachtelten Ungleichung (1) ist wesentlich inhaltsreicher und kompakter als Musils Gleichungen (K-6) mit (K-8). Es ist daher schwer verständlich, warum Musil nicht nur die korrekte geschachtelte Ungleichung (1) und die Skizze nach Abbildung 1 im Heft 37 Register aufgenommen hat.

Formel (K-9):

Behauptung:

$$|K_s - K| = f < \frac{1}{N_s^2}$$

Nachweis: »*Perron*«, S. 43, Gl. (9) mit Tabelle 1.

[10] Kollmann, a. a. O., S. 10f

Abschlussbemerkungen:

1. Alle von Musil zu endlichen regelmäßigen Kettenbrüchen angegebenen Formeln lassen sich auf die bei Perron enthaltenen Beziehungen zurückführen. Es sei noch bemerkt, dass die von Musil gewählte Notation sinnfälliger ist als die bei Perron, weil die Kernbuchstaben *N* und *Z* direkt auf „Nenner“ und „Zähler“ hinweisen, während Perron hierfür *B* bzw. *A* wählt. Ferner konnte ein Mann mit der mathematischen Vorbildung Musils (Studium des Maschinenbaus an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn, Studium der Mathematik im Nebenfach an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin) diesen Transfer von der Notation Perrons auf seine eigene mühelos leisten.

2. Weiter konnte durch eine Literaturrecherche im digitalen Katalog der TU Wien festgestellt werden, dass das Buch von Perron sich in dieser Bibliothek befindet, so dass es Musil während seiner dortigen Beschäftigung (1911 – 1913) zur Verfügung gestanden haben kann.

3. Schließlich wurde noch ein früheres Buch des Mathematikers Felix Klein[11] ermittelt, das einen Teil der von Perron angegebenen Formeln enthält. Dieses Buch befindet sich jedoch nicht in der Bibliothek der Technischen Universität Wien, so dass es mit sehr großer Wahrscheinlichkeit als Informationsquelle für Musil ausscheidet.

4. Daher ist festzuhalten, dass aus den Untersuchungen von Kollmann[12] sich als TAQUN für den Eintrag der Formeln zu den Kettenbrüchen in das Heft 37 aus Musils Nachlass das Jahr 1913 (Erscheinungsjahr des Buches von Perron) ergibt. Da die rund 312 von Musil notierten Formeln[13] sich auf hinter einander liegenden Seiten befinden, kann davon ausgegangen werden, dass diese zeitlich zusammenhängend von Musil notiert wurden. Es gibt in Heft 37 Register keinerlei Hinweise, dass Musil die einzelnen Kapitel der Formeln nicht in chronologischer Reihenfolge notiert hat. Schließlich ist als TPQN der August 1914 zu vermuten, da Musil nach seinem Einrücken am 20. August 1914 als Leutnant der Reserve zum Landsturm in Linz wohl kaum mehr Zeit gehabt hat, sich mit mathematischen Formeln zu beschäftigen.

---

[11] Klein, Felix: Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I, Göttingen 1896.
[12] Kollmann, a.a. O. S. 36f.
[13] Vgl. zur Anzahl der von Musil notierten Formeln. Tabelle 1 in dem Kapitel „Einleitung“ zu diesem Kommentar.