Franz Gustav Kollmann: *Transkription und Kommentare zu den von Musil im "Register"-Heft notierten Formeln. Kommentar zu den trigonometrischen Formeln*. Akademie der Wissenschaften und der Literatur | Mainz (Hrsg.), 2017.
URN: urn:nbn:de:0238-musil-formeln-4-trigonometrische-formeln_1.

4. Kommentar zu den trigonometrischen Formeln

Franz Gustav Kollmann
München

4.1 Einleitung

Musil verwendet für die trigonometrischen Funktionen teilweise eine heute nicht mehr gebräuchliche Schreibweise. In der folgenden Tabelle wird die Korrespondenz der von Musil verwendeten Notation mit der heute in der Mathematik üblichen angegeben.

1: Musils und die heute übliche Notation

Notation nach Musil	**Übliche Notation**
$\operatorname{tg} p$, gelegentlich auch $\operatorname{tang} p$	$\tan p$
$\operatorname{ctg} p$	$\cot p$

In diesem Kommentar werden die heute üblichen Notationen auf alle im Registerheft enthaltenen Formeln angewendet. Es werden also stets $\operatorname{tg} p$ durch $\tan p$ und $\operatorname{ctg} p$ durch $\cot p$ ersetzt. Dabei können an die Stelle der Variablen p andere Variablen treten z. B. x oder u.

Neben den üblichen trigonometrischen Funktionen betrachtet Musil auch die heute weniger gebräuchlichen Funktionen, vgl. »*Bronstein*«, S. 78, (2.70) und (2.71).

$$\sec p := \frac{1}{\cos p} \quad \text{gesprochen „secans } p\text{“}$$

$$\operatorname{cosec} p = \frac{1}{\sin p} \quad \text{gesprochen „cosecans } p\text{“}$$

Ungebräuchlich sind die beiden folgenden Funktionen, deren Definition dem Internet (vgl. E. Weisstein: http://mathworld.wolfram.com/Versine.html, aufgerufen am 16.11.2016, 09:32 Uhr und http://mathworld.wolfram.com/Coversine.html), aufgerufen am 16.11.2016 um 09:40 entnommen wurden .

$$\sin\operatorname{vers} p := 1 - \cos p \qquad \text{(Definition 1)}$$

$$\cos\operatorname{vers} p := 1 - \sin p \qquad \text{(Definition 2)}$$

Bei Weisstein werden diese Funktionen mit versin und coversin bezeichnet. In diesem Kommentar wird die Schreibweise Musils beibehalten.

Die von Musil notierten trigonometrischen Formeln lassen sich in folgende Gruppen einteilen:

1. Darstellung einer Winkelfunktion durch andere Winkelfunktionen (z. B. $\sin p$ durch $\cos p, \tan p, \cot p, \sec p$ und $\operatorname{cosec} p$, vgl. (T-4).
2. Bekannte Umrechnungsformeln wie Additionstheoreme [(T-30) mit (T-35)], Halbwinkelfunktionen [(T-12) und (T-13)], Winkelfunktionen des vielfachen Arguments [(T-26) und (T-27)], Potenzen der Winkelfunktionen [(T-24) und (T-25)], Summen zweier trigonometrischer Funktionen (Identitäten) [(T-40) mit (T-46)].
3. Sonstige Formeln.

Der Kommentar zu den trigonometrischen Formeln wird in zwei Unterabschnitte gegliedert:

- **Darstellungsformeln**
- **Umrechnungs- und sonstige Formeln**

Die Zusammenfassung der Umrechnungs- und sonstigen Formeln in einem Abschnitt ist erforderlich, weil Musil die Umrechnungs- und sonstigen Formeln nicht streng nach einander anordnet.

Sofern die von Musil notierten trigonometrischen Formeln sich direkt in »*Bronstein*« oder in den beiden Interenetquellen finden, werden die Fundstellen wie oben angegeben. Sofern sie sich nicht in »*Bronstein*« oder den Internetquellen finden, werden sie abgeleitet oder verifiziert.

Wichtige Hilfsformeln

Für den Kommentar sind einige elementare Hilfsformeln erforderlich, die im Folgenden zusammengestellt werden.

Heute ist es allgemein üblich Winkel nicht in Gradmaß sondern im Bogenmaß $0 \le \hat{\alpha} \le 2\pi$ anzugeben. Zunächst wird für beliebige Winkel α die Umrechnung vom Gradmaß $\alpha°$ in das Bogenmaß $\hat{\alpha}$ angegeben. Denn Musil gibt spezielle Winkel im Gradmaß $\alpha°$ (z. B. 45°) an. Das Bogenmaß $\hat{\alpha}$ wird abgeleitet aus dem Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 1$, der als Einheitskreis bezeichnet wird. Der Umfang des Einheitskreises beträgt

$$U = 2\pi$$

Um den Umfang des Einheitskreises zu durchlaufen, muss daher im Gradmaß der Winkel von 360° durchlaufen werden. Es sei im Gradmaß ein beliebiger Winkel[1] $\alpha° \leq 360°$ gegeben. Die Kennzeichnung, dass dieser Winkel im Bogenmaß angegeben wird, erfolgt durch einen über dem Kernbuchstaben α angeordneten Bogen, also $\widehat{\alpha}$. Für alle Winkel im Bogenmaß $0 \leq \widehat{\alpha} \leq 2\pi$ gilt

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\pi}{s} \text{ mit } s \text{ als beliebiger reeller Zahl } \infty \geq s \geq 1 \qquad (1)$$

Gesucht ist das Bogenmaß $\widehat{\alpha}$ eines Winkels, dessen Gradmaß $\alpha°$ bekannt ist. Für diesen Winkel gilt im Gradmaß die Darstellung

$$\alpha° = \frac{360°}{s} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt die Umrechnungsformel

$$\widehat{\alpha} = \pi \frac{\alpha°}{180°} \qquad (3)$$

Musil verwendet gelegentlich in den von ihm notierten Formeln die in Tabelle1 in der ersten Spalte im Gradmaß angegebenen Winkel. Diese werden in der zweiten Spalte im Bogenmaß angegeben.

Tabelle 2 Umrechnung von Grad- in Bogenmaßen

Gradmaß	***Bogenmaß***
30°	$\pi / 6$
45°	$\pi / 4$
60°	$\pi / 3$

Es werden im Folgenden Hilfsformeln für die elementaren trigonometrischen Funktionen angegeben. Die folgenden Hilfsformeln finden sich alle in »*Bronstein*«, S. 79 – 81.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \text{(TH-1)}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \qquad \text{(TH-2)}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \qquad \text{(TH-3)}$$

Dabei werden die Winkelbezeichnungen α und β mit den von Musil verwendeten Winkelbezeichnungen (meistens *p* und *q*) identifiziert.

Gelegentlich werden folgende Wertepaare (vgl. »*Bronstein*«,S. 79, Tabelle 2.3) benötigt

[1] Ohne Verletzung der Allgemeingültigkeit brauchen nur Winkel $0 \leq \alpha° \leq 360°$ betrachtet werden, da die trigonometrischen Funktionen im Gradmaß entweder die Periode 180° oder 360° besitzen..

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{TH-4}$$

und nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3

$$\tan\frac{\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4} = 1 \tag{TH-5}$$

Weiter gilt nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \tag{TH-6}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{TH-7}$$

In »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) finden sich

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{TH-8}$$

und (2.89)

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{TH-9}$$

Schließlich gilt nach »*Bronstein*«, S. 80, (2.92) und (2.93)

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \tag{TH-10}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha} \tag{TH-11}$$

Nach »*Bronstein*«, S. 83 (2.130) und (2.131) gilt

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)} \tag{TH-12}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)} \tag{TH-13}$$

Nach »*Bronstein*«, S. 79, Tabelle 2.3 gilt

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(TH-14)}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \text{(TH-15)}$$

4.2 Darstellungsformeln

Formel (T-1)$_1$:

Behauptung:

$$\sin^2 p + \cos^2 p = 1$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 80, (2.82)

Formel (T-1)$_2$:

Behauptung:

$$\tan p \cdot \cot p = 1$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 80, (2.87)

Formel (T-1)$_3$:

Behauptung:

$$\sec p \cos p = 1$$

Nachweis: Durch Umstellen von »*Bronstein*«, S. 78, (2.70)

Bemerkung:

Die umgestellte Form von (T-1)$_3$ nach »*Bronstein*«

$$\boxed{\sec x := \frac{1}{\cos x}}$$

gilt in der mathematischen Literatur als Definition der Funktion $\sec x$.

Formel (T-2)$_1$:

Behauptung:

$\operatorname{cosec} p \cdot \sin p = 1$

Nachweis: Durch Umstellen von »*Bronstein*«, S. 78, (2.71)

Die umgestellte Form von (T-2)$_1$ nach »*Bronstein*«

$$\boxed{\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}}$$

gilt in der mathematischen Literatur als Definition der Funktion $\operatorname{cosec} x$.

Formel (T-2)$_2$:

Behauptung:

$\sec^2 p - \tan^2 p = 1$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 80, (2.83)

Formel (T-2)$_3$:

Behauptung:

$\operatorname{cosec}^2 p - \cot^2 p = 1$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 80, (2.84)

Formel (T-3)$_1$:

Behauptung:

$\operatorname{sin vers} p + \cos p = 1$

Nachweis: Durch Umstellen der Definition (1) (vgl. oben)

Bemerkung zu (T-3)$_1$: In Heft 37 schreibt Musil für den ersten Term der Behauptung $\sin \cdot \operatorname{vers} \cdot p$. Dies ist aus mathematischer Sicht nicht sinnvoll, da weder innerhalb der Funktionsbezeichnung $\operatorname{sin vers}$ ein trennender Malpunkt noch zwischen der Funktionsbezeichnung und deren Argument p Malpunkte eingefügt werden dürfen.

Formel (T-3)₂:

Behauptung:

$$\cos \operatorname{vers} p + \sin p = 1$$

Nachweis: Durch Umstellen der Definition (2)

Formeln (T-4):

Vorbemerkung:

In der Formelgruppe (T-4) wird die trigonometrische Funktion $\sin p$ durch andere Winkelfunktionen ausgedrückt.

Formeln $(T\text{-}4)_1$, (T-4)2, $(T\text{-}4)_3$:

Behauptung:

$$\sin p = \sqrt{1 - \cos p^2 p} = \frac{\tan p}{\sqrt{1 + \tan^2 p}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 p}}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S.81, Tabelle 2.5, erste Zeile.

Formel $(T\text{-}4)_4$:

Behauptung:

$$\sin p = \frac{\sqrt{\sec^2 - 1}}{\sec p}$$

Beweis:

Durch Einsetzen von $(T\text{-}1)_3$ und anschließendes Multiplizieren von Zähler und Nenner mit $\cos p$ und Beachtung von (TH-1) folgt für die rechte Seite der Behauptung

$$\frac{\sqrt{\sec^2 p - 1}}{\sec p} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 p} - 1}}{\frac{1}{\cos p}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 p}}{1} = \sin p$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Formel (T-4)$_5$:

Behauptung:

$$\sin p = \frac{1}{\operatorname{cosec} p}$$

Beweis:

Durch Umstellung von (T-2)$_1$.

Formel (T-4)$_6$:

Behauptung:

$$\sin p = \cos p \tan p$$

Nachweis: Umstellung von Gleichung »*Bronstein*,« S. 80, (2.88)

Gleichung »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) ist identisch mit der wichtigen Hilfsformel (TH-8).

Formeln (T-5)$_1$, (T-5)$_2$, (T-5)$_3$:

Behauptung:

$$\cos p = \sqrt{1 - \sin^2 p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 p}} = \frac{\operatorname{cot} p}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 p}}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S.81, Tabelle 2.5, zweite Zeile

Formel (T-5)$_4$:

Behauptung:

$$\cos p = \frac{1}{\sec p}$$

Nachweis: Durch Umstellen von (T-1)$_1$.

Formel (T-5)$_5$:

Behauptung:

$$\cos p = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}{\operatorname{cosec} p}$$

Beweis:

Mit (T-5)$_1$ und (T-2)$_1$ folgt

$$\cos p = \sqrt{1-\sin^2 p} = \sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 p}} = \frac{\sqrt{1-\operatorname{cosec}^2 p}}{\operatorname{cosec} p}$$

Formel (T-5)$_6$:

Behauptung:

$$\cos p = \sin p \cot p$$

Nachweis: Umstellen von (TH-9).

Bemerkung zu (T-4) und (T-5):

Die letzen beiden Umformungen in diesen beiden Formeln passen schlecht zu den vorausgehenden. In den vorhergehenden Umformungen werden nämlich die trigonometrischen Funktionen $\sin p$ bzw. $\cos p$ durch jeweils eine einzige andere trigonometrische Funktion (z. B. $\cos p$ bei $\sin p$ usw.) ausgedrückt. In diesem Zusammenhang ist es nicht konsequent, als letzte Umformungen zwei Gleichungen anzugeben, bei denen sich auf der rechten Seite zwei verschiedene trigonometrische Funktionen (z. B. $\cos p$ und $\tan p$ bei (T-4)$_6$) befinden.

Formeln (T-6)$_1$, (T-6)$_2$, (T-6)$_3$:

Behauptung:

$$\tan p = \frac{\sin p}{\sqrt{1-\sin^2 p}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 p}}{\cos p} = \frac{1}{\cot p}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S.81, Tabelle 2.5, dritte Zeile.

Formel (T-6)$_4$:

Behauptung:

$$\tan p = \sqrt{\sec^2 p - 1}$$

Beweis:

Unter Benutzung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.88), $(T\text{-}4)_4$ und $(T\text{-}5)_4$ folgt

$$\tan p = \frac{\sin p}{\cos p} = \frac{\dfrac{\sqrt{\sec^2 p - 1}}{\sec p}}{\dfrac{1}{\sec p}} = \sqrt{\sec^2 - 1}$$

Formel $(T\text{-}6)_5$:

Behauptung:

$$\tan p = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}$$

Beweis:

Unter Benutzung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.88), $(T\text{-}4)_5$ und $(T\text{-}5)_5$ folgt

$$\tan p = \frac{\sin p}{\cos p} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{cosec} p}}{\dfrac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}{\operatorname{cosec} p}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}$$

Formeln (T-7)1, $(T\text{-}7)_2$, $(T\text{-}7)_3$:

Behauptung:

$$\cot p = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 p}}{\sin p} = \frac{\cos p}{\sqrt{1 - \cos^2 p}} = \frac{1}{\tan p}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S.81, Tabelle 2.5, vierte Zeile.

Formel (T-7)$_4$:

Behauptung:

$$\cot p = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 p - 1}}$$

Beweis:

Aus $\cot p = 1/\tan p$ und (T-6)$_4$ folgt

$$\cot p = \frac{1}{\tan p} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 p - 1}}$$

Formel (T-7)$_5$:

Behauptung:

$$\cot p = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}$$

Beweis:

Aus $\cot p = 1/\tan p$ und (T-6)$_5$ folgt

$$\cot p = \frac{1}{\tan p} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}} = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}$$

Formeln (T-8)$_1$:

Behauptung:

$$\sec p = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 p}}$$

Analyse:

Diese Formel ist nicht korrekt. Denn nach (T-1)$_3$ und (T-1)$_1$ gilt

$$\sec p = \frac{1}{\cos p} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 p}}$$

Vermutlich handelt es sich um einen Schreibfehler.

Formeln $(T\text{-}8)_2$:

Behauptung:

$$\operatorname{cosec} p = \frac{1}{\sin p}$$

Beweis:

$(T\text{-}8)_2$ folgt unmittelbar aus $(T\text{-}2)_1$.

Formeln $(T\text{-}8)_3$:

Behauptung:

$$\sec p = \sqrt{1+\tan^2 p}$$

Beweis:

Aus $(T\text{-}6)_4$ folgt durch Quadrieren und Auflösen[2] nach $\sec p$

$$\tan^2 p = \sec^2 p - 1 \quad \rightarrow \quad \sec p = \sqrt{1+\tan^2 p}$$

Formeln $(T\text{-}8)_4$:

Behauptung:

$$\sec p = \frac{\sqrt{1+\cot^2 p}}{\cot p}$$

Beweis:

Aus $(T\text{-}7)_4$ folgt durch Quadrieren und Auflösen nach $\sec p$

$$\cot p = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 p - 1}} \quad \rightarrow \quad \sec^2 p - 1 = \frac{1}{\cot^2 p} \quad \rightarrow \quad \sec p = \frac{\sqrt{1+\cot^2 p}}{\cot p}$$

Formeln $(T\text{-}8)_5$:

[2] Das Pfeilzeichen → bedeutet in den folgenden Formeln der auf der rechten Seite des Zeichens stehende Ausdruck folgt aus dem auf der linken Seite stehenden.

Behauptung:

$$\sec p = \frac{\operatorname{cosec} p}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}$$

Beweis:

Aus (T-1)$_3$ und (T-5)$_5$ folgt

$$\left.\begin{aligned} \sec p &= \frac{1}{\cos p} \\ \cos p &= \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}{\operatorname{cosec} p} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \sec p = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}}{\dfrac{1}{\operatorname{cosec} p}} = \frac{\operatorname{cosec} p}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}$$

Formeln (T-8)$_6$:

Behauptung:

$$\sec p = \frac{\tan p}{\sin p}$$

Beweis:

Aus (T-1)$_3$ und »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) folgt durch Umstellen

$$\left.\begin{aligned} \sec p &= \frac{1}{\cos p} \\ \cos p &= \frac{\sin p}{\tan p} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \sec p = \frac{\tan p}{\sin p}$$

Formel (T-9)$_1$:

Behauptung:

$$\operatorname{cosec} p = \frac{1}{\sin p}$$

Beweis:

Durch Auflösen von (T-2)$_1$ nach $\operatorname{cosec} p$.

Formel (T-9)$_2$:

Behauptung:

$$\operatorname{cosec} p = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 p}}$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus (T-9)$_1$ und Einsetzen von $\sin p$ nach (T-4)$_1$.

Formel (T-9)$_3$:

Behauptung:

$$\operatorname{cosec} p = \frac{\sqrt{1+\tan^2 p}}{\tan p}$$

Beweis:

Folgt aus (T6-)$_5$ durch Quadrieren und anschließendes Auflösen nach $\operatorname{cosec} p$

$$\tan p = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}} \rightarrow \operatorname{cosec}^2 p - 1 = \frac{1}{\tan^2 p} \rightarrow \operatorname{cosec}^2 p = 1 + \frac{1}{\tan^2 p} = \frac{1+\tan^2 p}{\tan^2 p}$$

und daher

$$\operatorname{cosec} p = \frac{\sqrt{1+\tan^2 p}}{\tan p}$$

Formel (T-9)$_4$:

Behauptung:

$$\operatorname{cosec} p = \sqrt{1+\cot^2 p}$$

Beweis:

Quadrieren von (T-7)$_5$ und Auflösen nach $\operatorname{cosec} p$ gibt

$$\cot p = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1} \quad \rightarrow \quad \cot^2 p = \operatorname{cosec}^2 p - 1 \quad \rightarrow \quad \operatorname{cosec} p = \sqrt{1+\cot^2 p}$$

Formel (T-9)$_5$:

Behauptung:

$$\operatorname{cosec} p = \frac{\sec p}{\sqrt{\sec^2 p - 1}}$$

Beweis:

Aus (T-2)$_1$ und (T-4)$_4$ folgt Umstellen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cosec} p &= \frac{1}{\sin p} \\ \sin p &= \frac{\sqrt{\sec^2 p - 1}}{\sec p} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \operatorname{cosec} p = \frac{\sec p}{\sqrt{\sec^2 p - 1}}$$

Formel (T-9)$_6$:

Behauptung:

$$\operatorname{cosec} p = \frac{\cot p}{\cos p}$$

Beweis:

Aus (T-2)$_1$ und »*Bronstein*«, S. 80, (2.89) folgt durch Umstellen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cosec} p &= \frac{1}{\sin p} \\ \cot p &= \frac{\cos p}{\sin p} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \operatorname{cosec} p = \frac{\cot p}{\cos p}$$

Formel (T-10)$_1$:

Behauptung:

$$\operatorname{sinvers} p = 1 - \cos p$$

Nachweis: Identisch mit (T-3)$_1$.

Formel (T-10)$_2$:

Behauptung:

$$\operatorname{sinvers} p = 2\sin^2\frac{p}{2}$$

Beweis:

Aus »*Bronstein*«, S. 82, (2.111) folgt

$$\sin\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos p)} \quad \rightarrow \quad \cos p = 1-2\sin^2\frac{p}{2}$$

Einsetzen in (T-3)$_1$ liefert die Behauptung.

Formel (T-11)$_1$:

Behauptung:

$$\operatorname{cosvers} p = 1-\sin p$$

Nachweis: (T-11)$_1$ folgt durch Umstellen von (T-3)$_2$.

Formel (T-11)$_2$:

Bemerkung: In (T-11)$_2$ verwendet Musil den Ausdruck $\sin^2(45° - \frac{p}{2})$, in dem ein Winkel im Gradmaß angegeben wird. Die Umrechnung[3] von Grad- in Bogenmaß wird in der Einleitung zu diesem Kommentar angegeben, vgl. dazu Tabelle 2. Danach gilt $45° = \pi/4$.

Behauptung:

$$\operatorname{cosvers} p = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right)$$

Beweis:

Nach (TH-2) mit $\alpha = \pi/4$ und $\beta = p/2$

[3] Weitere Umrechnungen von dem im Gradmaß angegebenen Winkel in das Bogenmaß werden im folgenden nicht mehr erläutert.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{p}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{p}{2} \qquad (1)$$

Einsetzen von (TH-4) in (1) liefert

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{p}{2}-\sin\frac{p}{2}\right) \qquad (2)$$

Durch Quadrieren von (2) ergibt sich unter Berücksichtigung von (AH-1)

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{p}{2}+\cos^2\frac{p}{2}-2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\right) \qquad (3)$$

Dabei wurde bei der zweiten Umformung von (3) von (TH-4) Gebrauch gemacht. Da nach »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) $2\cos\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}=\sin p$ ist, folgt aus (3) und $(\text{T-3})_2$ schließlich

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p}{2}\right)=1-\sin p=\operatorname{cosvers} p$$

Formel $(\text{T-12})_1$:

Behauptung:

$$\sin\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos p)}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.111)

Formel $(\text{T-12})_2$:

Behauptung:

$$\cos\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{p}{2}\right)}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.112).

Formel (T-13)$_1$:

Behauptung:

$$\tan\frac{p}{2} = \frac{\sin p}{1+\cos p}$$

Nachweis:

»Bronstein«, S. 82, (2.113)

Formel (T-13)$_2$:

Behauptung:

$$\cot\frac{p}{2} = \frac{\sin p}{1-\cos p}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.114)

Formel (T-14)$_1$:

Behauptung:

$$\sin p + \cos p = \sqrt{1+\sin 2p}$$

Beweis:

Durch Quadrieren der linken Seite der Behauptung folgt mit (TH-1) und (AH-1)

$$\left(\sin p + \cos p\right)^2 = \sin^2 p + \cos^2 p + 2\sin p\cos p = 1 + 2\sin p\cos p \qquad (1)$$

Nach »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) ist

$$2\sin p\cos p = \sin 2p \qquad (2)$$

Durch Einsetzen von (2) in (1) und anschließendes Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten ergibt sich die Behauptung.

Formel (T-14)$_2$:

Behauptung:

$$\sin p + \cos p = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - p\right)$$

Beweis:

Zum Beweis wird die rechte Seite der Behauptung umgeformt. Mit (TH-3) und anschließendem Einsetzen von (TH-4) folgt

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos p + \sin\frac{\pi}{4}\sin p\right) = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin p + \cos p)$$

Die Umformung der rechten Seite ergibt also die linke.

Formel (T-15)$_1$:

Behauptung:

$$\cos p - \sin p = \sqrt{1 - \sin 2p}$$

Beweis:

Quadrieren der linken Seite der Behauptung gibt mit (AH-1), (TH-1) und »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) [vgl. hierzu auch (T-26)$_1$]

$$(\cos p - \sin p)^2 = \cos^2 p + \sin^2 p - 2\cos p \sin p = 1 - \sin 2p \rightarrow (\cos p + \sin p)^2 = 1 - \sin 2p$$

Durch Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten folgt die Behauptung.

Formel (T-15)$_2$:

Behauptung:

$$\cos p - \sin p = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \right)p$$

Beweis:

Nach (TH-2) und (TH-4) folgt

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-p\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos p-\cos\frac{\pi}{4}\sin p\right)=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos p-\sin p\right)=\cos p-\sin p$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Formel (T-16)$_1$:

Behauptung:

$$\tan p+\cot p=2\operatorname{cosec}2p$$

Beweis:

Mit den Beziehungen »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) und (2.89), (2.82), S. 81 (2.96) und S.78 (2.70) ergibt sich der nachstehende Beweis

$$\tan p+\cot p=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\cos p}{\sin p}=\frac{\sin^2 p+\cos^2 p}{\sin p\cos p}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2p}=2\operatorname{cosec}2p$$

Formel (T-16)$_2$:

Behauptung:

$$\cot p-\tan p=2\cot 2p$$

Beweis:

Mit den Beziehungen »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) und (2.89), S. 81 (2.98) S. 80 (2.89) ergibt sich der nachstehende Beweis

$$\cot p-\tan p=\frac{\cos p}{\sin p}-\frac{\sin p}{\cos p}=\frac{\cos^2 p-\sin^2 p}{\sin p\cos p}=\frac{\cos 2p}{\frac{1}{2}\sin 2p}=2\cot 2p$$

4.3 Umrechnungs- und sonstige Formeln

Formel (T-17)$_1$:

Behauptung:

$$1+\sin p = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)$$

Beweis:

Unter Verwendung von (TH-2) und (TH-4) folgt mit $\alpha = \pi/4$ und $\beta = p/2$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{p}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{p}{2}+\sin\frac{p}{2}\right) \tag{1}$$

Durch Quadrieren von (1) ergibt sich unter Beachtung von (AH-1) und (TH-1)

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{p}{2}+\cos^2\frac{p}{2}+2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+\sin p)$$

wobei »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) mit $\alpha = p/2$ verwendet wurde. Damit ist (T-17)$_1$ bewiesen.

Formel (T-17)$_2$:

Behauptung:

$$1-\sin p = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p}{2}\right)$$

Nachweis: Unter Beachtung der Definition (2) $\operatorname{cosvers} p = 1-\sin p$ ist diese Formel identisch mit (T-11)$_2$, was Musil nicht vermerkt hat. Die Formel (T-11)$_2$ wird dort bewiesen.

Formel (T-18)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{1+\sin p}{1-\sin p} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)$$

Beweis:

Zunächst gilt nach »*Bronstein*«, S. 80, (2.88)

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)} \tag{1}$$

Nach (T-17)$_1$ gilt für den Zähler auf der rechten Seite

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+\sin p) \tag{2}$$

Zum Beweis von (18-1)$_1$ muss daher gezeigt werden, dass für den Nenner auf der rechten Seite von (1) gilt

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\sin p) \tag{3}$$

Nach (TH-3) folgt zunächst mit $\alpha=\pi/4$ und $\beta=p/2$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{p}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{p}{2}\right)^2 \tag{4}$$

Einsetzen von (TH-4) in (4) und Ausquadrieren auf der rechten Seite liefert

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{p}{2}+\sin^2\frac{p}{2}-2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\sin p) \tag{5}$$

Bei der Umformung der rechten Seite von (5) wurde von (TH-1) und »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) Gebrauch gemacht. Da (5) vollkommen mit (3) übereinstimmt, ist der Beweis von (T-18)$_1$ erbracht.

Formel (T-18)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{1+\sin p}{\cos p}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right) \tag{1}$$

Beweis:

Mit $\alpha = \pi / 4$ und $\beta = p / 2$ folgt aus (TH-10)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{p}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{p}{2}}$$

Weiter folgt mit (TH-5)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{1+\tan\frac{p}{2}}{1-\tan\frac{p}{2}}=\frac{\cos\frac{p}{2}+\sin\frac{p}{2}}{\cos\frac{p}{2}-\sin\frac{p}{2}} \qquad (1)$$

wobei für die zweite Umformung (TH-8) berücksichtigt wurde.

Aus dieser Formel und (TH-12) und (TH-13) folgt

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{\sqrt{1+\cos p}+\sqrt{1-\cos p}}{\sqrt{1+\cos p}-\sqrt{1-\cos p}}$$

Erweiterung der rechten Seite mit dem Ausdruck $\sqrt{1+\cos p}+\sqrt{1-\cos p}$ gibt unter Berücksichtigung der elementaren Formeln (AH-1) und (AH-2) die Umformung

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{1+\cos p+1-\cos p+2\sqrt{(1+\cos p)(1-\cos p)}}{1+\cos p-(1-\cos p)}$$

Für den Radikand im Zähler gilt mit (TA-2)

$$(1+\cos p)(1-\cos p)=1-\cos^2 p=\sin^2 p$$

Damit folgt unter Beachtung (TH-1)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)=\frac{2\left(1+\sqrt{1-\cos^2 p}\right)}{2\cos p}=\frac{1+\sin p}{\cos p}$$

Das ist die Behauptung.

Formel (T-19)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{1+\tan p}{1-\tan p}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+p\right)$$

Beweis:

Nach (TH-10) und (TH-5) gilt für die rechte Seite der Behauptung

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+p\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan p}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan p}=\frac{1+\tan p}{1-\tan p}$$

Die rechte Seite der Behauptung lässt sich also in deren linke umformen, womit sie bewiesen ist.

Formel (T-19)$_2$:`

Behauptung:

$$\frac{1-\tan p}{1+\tan p}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-p\right)$$

Beweis:

Mit (TH-5) und (TH-10) ergibt sich für die rechte Seite

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-p\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan p}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan p}=\frac{1-\tan p}{1+\tan p}$$

Vorbemerkung zu den Formeln (T-20) mit (T-25):

In diesen Formeln verwendet Musil für die Argumente der trigonometrischen Funktionen die Winkel 30° und 60°. Ihnen entsprechen die Bogenmaße (vgl. (TH-6 und (TH-7) die Werte $\pi/6$ und $\pi/3$, die im Folgenden verwendet werden.

Formel (T-20):

Behauptung:

$$\sin\left(p+\frac{\pi}{6}\right)=\cos p-\sin\left(\frac{\pi}{6}-p\right)$$

Beweis:

Es wird gezeigt; dass die rechte Seite der Behauptung gleich der linken Seite ist.

Nach (TH-2) gilt

$$\cos p-\sin\left(p-\frac{\pi}{6}\right)=\cos p-\sin\frac{\pi}{6}\cos p+\cos\frac{\pi}{6}\sin p \tag{1}$$

Daher wird aus (1), (TH-6) und (TH-7) durch Umformen der rechten Seite

$$\cos p-\sin\left(\frac{\pi}{6}-p\right)=\frac{1}{2}\cos p+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin p \tag{2}$$

Unter Berücksichtigung von (TH-6), (TH-7) und (TH-2) lässt sich die rechte Seite von (2) wie folgt umformen

$$\frac{1}{2}\cos p+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin p=\sin\frac{\pi}{6}\cos p+\cos\frac{\pi}{6}\sin p=\sin\left(\frac{\pi}{6}+p\right) \tag{3}$$

Bei der zweiten Umformung wurde (TH-2) mit $\alpha=\pi/6$ und $\beta=p$ verwendet. Die rechte Seite von (3) stimmt mit der linken Seite der Behauptung überein, womit diese bewiesen ist.

Formel (T-21):

Behauptung:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+p\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-p\right)-\sin p$$

Beweis:

Umformung beider Seiten der Behauptung mit (TH-3) gibt zunächst

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos p - \sin\frac{\pi}{6}\sin p = \cos\frac{\pi}{6}\cos p + \sin\frac{\pi}{6}\sin p - \sin p \qquad (1)$$

Der Term $(\cos\pi/6)\cos p$ tritt auf beiden Seiten auf und hebt sich daher heraus. Wegen $\sin\pi/6 = 1/2$ ergibt sich auf beiden Seiten der Ausdruck $-1/2\sin p$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Formel (T-22):

Behauptung:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - p\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + p\right) - \sin p$$

Beweis:

Umformung beider Seiten der Behauptung ergibt mit (TH-2)

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos p - \cos\frac{\pi}{3}\sin p = \sin\frac{\pi}{3}\cos p + \cos\frac{\pi}{3}\sin p - \sin p \qquad (1)$$

In (1) hebt sich auf beiden Seiten der Ausdruck $\sin(\pi/3)\cos p$ heraus und es folgt daher

$$-\cos\frac{\pi}{3}\sin p = \cos\frac{\pi}{3}\sin p - \sin p \qquad (2)$$

Durch Einsetzen von (TH-15) in (2) folgt die Behauptung, da beide Seiten von (2) gleich sind.

Formel (T-23):

Behauptung:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - p\right) = \cos p - \cos\left(\frac{\pi}{3} + p\right)$$

Beweis:

Mit (TH-3) ergibt sich auf beiden Seiten der Behauptung

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos p+\sin\frac{\pi}{3}\sin p=\cos p-\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos p-\sin\frac{\pi}{3}\sin p\right)$$

Hierin heben sich auf der linken und rechten Seite die Terme $\sin(\pi/3)\sin p$ weg. Ferner ist $\cos(\pi/3)=1/2$ Bronstein S.79, Tabelle 2.3 und damit folgt

$$\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}\cos p}_{\text{Linke Seite}}=\frac{1}{2}\cos p \qquad \cos p-\underbrace{\cos p-\frac{\pi}{3}\cos p}_{\text{Rechte Seite}}=\cos p-\frac{1}{2}\cos p=\frac{1}{2}\cos p$$

Die linke und rechte Seite der Behauptung lassen sich auf den gleichen Ausdruck umformen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Vorbemerkungen zu den Formelgruppen (T-24) und (T-25):

1. In diesen beiden Formelgruppen werden Potenzen der trigonometrischen Funktion $\sin p$ und $\cos p$ von Ordnung $k=2,3,4,5$ durch Reihen der Terme $\sin np$ und. $\cos np$ ausgedrückt, wobei $n\le k$ ist.
2. Musil schreibt seine Formeln in einer Form an, dass auf der linken Seite vor der potenzierten trigonometrischen Funktion ein ganzzahliger Vorfaktor auftritt. In den beigezogenen Formelsammlungen tritt der Kehrwert dieses Vorfaktors auf der rechten Seite auf. Daher werden die Behauptungen abweichend von Musils Original in dieser Form angegeben.

Formel (T-24)$_1$:

Behauptung:

$$\sin^2 p=\frac{1}{2}(1-\cos 2p)$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 83, (2.130)

Formel (T-24)$_2$:

Behauptung:

$$\sin^3 p=\frac{1}{4}(3\sin p-\sin 3p)$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 83, (2.132)

Formel (T-24)$_3$:

Behauptung:

$$\sin^4 p = \frac{1}{8}\left(\cos 4p - 4\cos 2p + 3\right)$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 83, (2.134)

Formel (T-24)$_4$:

Behauptung:

$$\sin^5 p = \frac{1}{16}\left(\sin 5p - 5\sin 3p + 10\sin p\right)$$

Beweis:

Unter E. Weisstein: http://mathworld.wolfram.com/TrigonometricPowerFormulas.html, aufgerufen am 16.11.2016, 11:47 findet sich folgende allgemeine Formel (8) für die Berechnung der Potenzen der Funktion $\sin x$ mit ungeradem Grad $2n+1$, n als ganzer Zahl:

$$\sin^{2n+1} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k} \sin\left[(2n+1-2k)x\right] \qquad (1)$$

Aus (1) und (AH-3 bis (AH-5) mit $x = p$ und $n = 2$

$$\sin^5 p = \frac{(-1)^2}{2^4}\left[\binom{5}{0}\sin 5p - \binom{5}{1}\sin^3 p + \binom{5}{2}\sin p\right]$$

Aus (AH-3) ergibt sich

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = \frac{4!\cdot 5}{4!} = 5 \qquad \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2} = 10$$

und damit folgt schließlich

$$\sin^5 p = \frac{1}{16}\left(\sin 5p - 5\sin 3p + 10\sin p\right) \qquad (2)$$

Gl. (2) ist genau die Formel (T-24)$_4$.

Formel (T-25)$_1$:

$$\cos^2 p = \frac{1}{2}(1 + \cos 2p)$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 83, (2.131)

Formel (T-25)$_2$:

Behauptung:

$$\cos^3 p = \frac{1}{4}(\cos 3p + 3\cos p)$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 83, (2.133)

Formel (T-25)$_3$:

Behauptung:

$$\cos^4 p = \frac{1}{8}(\cos 4p + 4\cos 2p + 3)$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 83, (2.135)

Formel (T-25)$_4$:

Behauptung:

$$\cos^5 p = \frac{1}{16}(\cos 5p - 5\cos 3p + 10\cos p)$$

Beweis:

Die im Beweis von (T-24)$_4$ angegebene Quelle von Weisstein enthält folgende Formel

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cos\left[(2n+1-2k)x\right] \qquad (1)$$

Zu beachten ist, dass in (1) auf der rechten Seite ausschließlich positive Glieder stehen. Mit (AH-3) bis (AH-5) folgt zunächst aus (2) mit $x = p$ für $n = 2$

$$\cos^5 p = \frac{1}{16}\left(\binom{5}{0}\cos 5p + \binom{5}{1}\cos 3p + \binom{5}{2}\cos p\right) \tag{2}$$

Mit den für die Formel (T-24)$_1$ berechneten Binomialkoeffizienten folgt

$$\cos^5 p = \cos 5p + 5\cos 3p + 10\cos p \tag{3}$$

Bemerkung: Gl. (3) unterscheidet sich von Musils Formel dadurch, dass der Term $5\cos 3p$ ein positives Vorzeichen aufweist, während bei Musil ein negatives steht. Vermutlich handelt es sich bei Musil um einen Übertragungsfehler. Die von Weisstein angegebene Formel (1) ist aus folgendem Grund richtig:

Dem Verfasser stand folgendes Buch zur Verfügung:: I. S. Gradstein und I. M. Ryzhik: Tables of Integrals, Series and Powers, Academic Press, 4th ed., 1984. Dort findet sich auf S. 25 im Abschnitt 1.320 Formel (2) für den Exponent $2n-1$. Eine Umrechnung auf den Exponenten $2n+1$ ergibt (1).

Vorbemerkung zu den Formelgruppe (T-26) und (T-27):

In diesen Formeln werden trigonometrische Funktionen, deren Argumente Vielfache np $n =$ natürliche Zahl des Grundarguments p sind, durch Potenzen und Produkte der Grundfunktionen $\sin p$ und $\cos p$ und deren Produkte dargestellt.

Formel (T-26)$_1$:

Behauptung:

$$\sin 2p = 2\sin p\cos p$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 81, (2.96)

Formel (T-26)$_2$:

Behauptung:

$$\sin 3p = 3\sin p\cos^2 p - \sin^3 p$$

Beweis:

Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.97) findet sich

$$\sin 3p = 3\sin p - 4\sin^3 p \tag{1}$$

Die Behauptung lässt sich mit Hilfe von (TH-1) wie folgt in (2) umformen:

$$\sin 3p = 3\sin p \cos^2 p - \sin^3 p = 3\sin p\left(1-\sin^2 p\right) - \sin^3 p = 3\sin p - 4\sin^3 p$$

Die Gln. (1) und (2) sind daher identisch. Die in »*Bronstein*« angegebene Gleichung ist für numerische Auswertungen zweckmäßiger als die von Musil, weil auf der rechten Seite nur $\sin p$ und $\sin^3 p$ auftreten, während bei Musil zusätzlich noch $\cos^2 p$ enthalten ist. Denn bei der Form (1) muss bei der Auswertung nur der Wert von $\sin p$ in einer Tabelle nachgeschlagen (oder in einem Programm aufgerufen) werden. Bei Musils Form ist zusätzlich der Wert von $\cos^2 p$ zu ermittelten.

Formel (T-26)$_3$:

Behauptung:

$$\sin 4p = 4\sin p \cos p\left(\cos^2 p - \sin^2 p\right) \tag{1}$$

Beweis:

Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.100)

$$\sin 4p = 8\cos^3 p \sin p - 4\sin p \cos p \tag{2}$$

Gl. (1) lässt sich mit Hilfe von (TH-1) wie folgt umformen:

$$\sin 4p = 4\sin p \cos p\left(2\cos^2 p - 1\right) = 8\cos^3 p \sin p - 4\sin p \cos p \tag{3}$$

Die Gln. (3) und (2) und daher auch (1) und (2) sind identisch.

Formel (T-26)$_4$:

Behauptung:

$$\sin np = \sin(n-1)p\cos p + \cos(n-1)p\sin p$$

Beweis:

Setze im Additionstheorem (TH-2) $\alpha = (n-1)p$ und $\beta = p$,so folgt sofort

$$\sin(np) = \sin\left[(n-1)p + p\right] = \sin\left[(n-1)p\right]\cos p + \cos\left[(n-1)p\right]\sin p$$

<u>Bemerkung</u>: Eine Gleichung der Form von Formel (T-26)$_4$ heißt <u>Rekursionsbeziehung</u>. Sie gestattet es durch wiederholte Anwendung alle Ausdrücke der Form $\sin np$ aus Ausdrücken niedrigerer Ordnung zu berechnen. Z. B. gilt für $n = 2$

$$\sin 2p = \sin p\cos p + \cos p\sin p = 2\sin p\cos p$$

womit Formel (T-26)$_1$ wieder gewonnen ist. Durch wiederholtes Anwenden von (T-26)$_4$ lassen sich Darstellungsformeln für $\sin np$ von beliebiger Ordnung *n* gewinnen.

<u>Formel (T-27)$_1$:</u>

<u>Behauptung:</u>

$$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p = 2\cos^2 p - 1 = 1 - 2\sin^2 p \tag{1}$$

<u>Beweis:</u>

Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.98)

$$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p \tag{2}$$

Gl. (2) stimmt mit dem ersten Ausdruck auf der rechten Seite von (1) überein. Die beiden anderen Ausdrücke ergeben sich durch Anwendung von (TH-1) wie folgt

$$\cos^2 p - \sin^2 p = \begin{cases} 2\cos^2 p - 1 \\ 1 - 2\sin^2 p \end{cases}$$

<u>Formel (T-27)$_2$:</u>

<u>Behauptung</u>:

$$\cos 3p = \cos^3 p - 3\sin^2 p\cos p \tag{1}$$

Beweis:

Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.99)

$$\cos 3p = 4\cos^3 p - 3\cos p \qquad (2)$$

Die rechte Seite von (1) lässt sich mit Hilfe von (TH-1) in die rechte Seite von (2) umformen.

$$\cos^3 p - 3\sin^2 p\cos p = \cos^3 p - 3\left(1-\cos^2 p\right)\cos p = 4\cos^3 p - 3\cos p$$

Dieser Ausdruck stimmt mit der Formel von »*Bronstein*« überein. Wie in $(T\text{-}26)_2$ ist die in »*Bronstein*« angegebene Gleichung zweckmäßiger als die von Musil, weil auf der rechten Seite nur $\cos p$ und $\cos^3 p$ auftreten, während bei Musil zusätzlich noch $\sin^2 p$ enthalten ist.

Formel $(T\text{-}27)_3$:

Behauptung:

$$\cos 4p = \cos^4 p - 6\sin^2 p\cos^2 p + \sin^4 p \qquad (1)$$

Beweis:

Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.101)

$$\cos 4p = 8\cos^4 p - 8\cos^2 p + 1 \qquad (2)$$

Die rechte Seite von (1) kann mit Hilfe von (TH-1) und (AH-1) in die rechte Seite von umgeformt werden.

$$\begin{aligned}&\cos^4 p - 6\left(1-\cos^2 p\right)\cos^2 p + \left(1-\cos^2 p\right)^2 = \\ &\qquad \cos^4 p - 6\cos^2 p + 6\cos^4 p + 1 - 2\cos^2 p + \cos^4 p = \\ &\qquad 8\cos^4 p - 8\cos^2 p + 1\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Formel (T-27)$_4$:

Behauptung:

$$\cos np = 2\cos(n-1)p\cos p - \cos(n-2)p$$

Beweis:

Die rechte Seite der Behauptung wird mit Hilfe von (TH-2) und (TH-3) mit $\alpha = np$ und $\beta = p$ bzw. $\beta = 2p$ wie folgt umgeformt

$$2\cos(n-1)p\cos p - \cos(n-2)p =$$
$$2(\cos np\cos p + \sin np\sin p)\cos p - \cos np\cos 2p - \sin np\sin p =$$
$$2\cos np\cos^2 p + \underbrace{2\sin np\sin p\cos p}_{\text{Term 1}} - \cos np\cos 2p - \underbrace{\sin np\sin 2p}_{\text{Term 2}}$$

Für den Term 1 in der letzten Zeile der vorstehenden Gleichung gilt mit (T-26)$_1$

$$\text{Term 1} = \sin np\sin 2p$$

Daher hebt sich Term 1 gegen Term 2. Als Rest R verbleibt

$$R = 2\cos np\cos^2 p - \cos np\cos 2p$$

Unter Beachtung von (T-25)$_1$ gilt

$$R = 2\cos np\cos^2 p - \cos np\left(2\cos^2 p - 1\right) = \cos np$$

Da die rechte Seite der Behauptung gleich ihrer linken, ist der Beweis geschlossen.

Formeln (T-28) und (T-29):

Behauptung:

Zusammenfassen der beiden Formeln ergibt

$$\sin(p \pm q) = \sin p\cos q \pm \cos p\sin q$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 80, (2.90). Die Formeln (T-28) und (T-29) stimmen mit (TH-2) überein.

Formeln (T-30) und (T-31):

Behauptung:

Zusammenfassen der beiden Formeln ergibt

$$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 80, (2.91). Die Formeln (T-30) und (T-31) stimmen mit (TH-3) überein.

Formeln (T-32) und (T-33):

Behauptung:

Das Zusammenfassen der beiden Formeln ergibt

$$\tan(p \pm q) = \frac{\tan p \pm \tan q}{1 \mp \tan p \tan q} = \frac{\cot q \pm \cot p}{\cot p \cot q \mp 1} \qquad (1)$$

Beweis:

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite ist identisch mit (TH-10). Der zweite ergibt aus (1) und (TH-9) wie folgt

$$\frac{\tan p \pm \tan q}{1 \mp \tan p \tan q} = \frac{\frac{1}{\cot p} \pm \frac{1}{\cot q}}{1 \mp \frac{1}{\cot p} \frac{1}{\cot q}}$$

Erweitern auf der rechten Seite mit $\cot p \cot q$ liefert

$$\frac{\tan p \pm \tan q}{1 \mp \tan p \tan q} = \frac{\cot q \pm \cot p}{\cot p \cot q \mp 1}$$

Formeln (T-34) und (T-35):

Behauptung:

Das Zusammenfassen der beiden Formeln ergibt

$$\cot(p \pm q) = \frac{\cot p \cot q \mp 1}{\cot p \pm \cot q} = \frac{1 \mp \tan p \tan q}{\tan p \pm \tan q}$$

Beweis:

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite ist identisch mit »*Bronstein*«, S. 80, (2.93). Der zweite ergibt sich durch ganz analoge Rechnung wie bei (T-32) und (T-33).

Vorbemerkung zu den Formeln (T-36) mit (T-39):

In diesen Formeln werden auf den linken Seiten stehende Produkte trigonometrischer Funktionen dargestellt. Es ist zweckmäßig, auf den rechten Seiten den gemeinsamen Faktor $1/2$ auszuklammern.

Formel (T-36):

Behauptung:

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}\left[\cos(p-q) - \cos(p+q)\right]$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.123)

Formel (T-37):

Behauptung:

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}\left[\cos(p-q) + \cos(p+q)\right]$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.124)

Bemerkung:

Der Ausdruck auf der linken Seite der Behauptung kann im Originalmanuskript von Musil auch als $\cos p - \cos q$ gelesen werden. Da diese Lesart nicht mit der oben nachgewiesenen Formel »*Bronstein*«, S. 82, (2.124) übereinstimmt ist sie falsch und wird daher hier nicht berücksichtigt.

Formel (T-38):

Behauptung:

$$\sin p \cos q = \frac{1}{2}\left[\sin(p+q) + \sin(p-q)\right]$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.125)

Formel (T-39):

Behauptung:

$$\cos p \sin q = \frac{1}{2}\left[\sin(p+q) - \sin(p-q)\right]$$

Beweis:

Durch Vertauschen von *p* und *q* folgt aus (T-38)

$$\cos p \sin q = \frac{1}{2}\left[\sin(p+q) + \sin(q-p)\right]$$

Es ist aber $q-p=-(p-q)$ und mit »*Bronstein*«, S. 79, (2.76) und. (2.77)

$$\sin(-p) = -\sin p \qquad \text{(TH-16)}$$

$$\cos(-p) = \cos p \qquad \text{(TH-17)}$$

Es folgt daher $\sin(q-p) = -\sin(p-q)$, womit der Beweis erbracht ist.

Vorbemerkung zu den Formeln (T-40) mit (T-45):

In diesen Formeln werden Summen und Differenzen trigonometrischer Funktionen mit verschiedenen Argumenten *p* und *q* angegeben.

Formel (T-40):

Behauptung:

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.115)

Formel (T-41):

Behauptung:

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.116)

Formel (T-42):

Behauptung:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.117)

Formel (T-43):

Behauptung:

$$\cos q - \cos p = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad (1)$$

Nachweis:

»*Bronstein*«, S. 82, (2.118)

Formeln (T-44):

Behauptung:

Die beiden Formeln lassen sich wie folgt zusammenfassen

$$\tan p \pm \tan q = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.119)

Formeln (T-45):

Behauptung:

Die beiden Formeln lassen sich unter Beachtung von

$$\sin(q-p) = -\sin(p-q)$$

wie folgt zusammenfassen

$$\cot p \pm \cot q = \pm\frac{\sin(\pm p+q)}{\sin p \sin q}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.120)

Formeln (T-46)$_1$:

Behauptung:

$$\tan q + \cot p = \frac{\cos(p-q)}{\sin p \cos q}$$

Nachweis:

Werden $\alpha = q$ und $\beta = p$ gesetzt, so wird (T-46)$_1$ identisch mit»*Bronstein*«, S. 82. (2

Formel (T-46)$_2$:

Behauptung:

$$\cot p - \tan q = \frac{\cos(p+q)}{\sin p \cos q}$$

Nachweis: »*Bronstein*«, S. 82, (2.122)

Formel (T-47):

Behauptung:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\tan\frac{p+q}{2}}{\tan\frac{p-q}{2}} = \tan\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

Beweis:

Für den ersten Teil der Behauptung gilt durch Einsetzen von (T-40) in den Zähler und von (T-41) in den Nenner

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\frac{\sin\frac{p+q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}}\frac{1}{\frac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}}}=\frac{\tan\frac{p+q}{2}}{\tan\frac{p-q}{2}}$$

dabei wurde von »*Bronstein*«, S. 80, (2.88) Gebrauch gemacht. Die zweite Umformung in (T-47) ist wegen »*Bronstein*«, S. 80, (2.87) trivial.

Formel (T-48):

Behauptung:

$$\frac{\cos p+\cos q}{\cos p-\cos q}=\frac{\cot\frac{p+q}{2}}{\tan\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

Beweis:

Für den zweiten Teil der Behauptung gilt durch Einsetzen (T-42) in den Zähler und von (T-43) in den Nenner auf der linken Seite

$$\frac{\cos(p+q)}{\cos(p-q)}=\frac{\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

Damit ist der zweite Teil der Formel bewiesen. Der erste Teil folgt aus dem zweiten direkt unter Beachtung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.87).

Formel (T-49)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{\cos p-\cos q}{\sin q-\sin p}$$

Beweis:

Es darf über Kreuz multipliziert werden, wenn $p \neq q$, $\cos p + \cos q \neq 0$ und $\sin q - \sin p \neq 0$ gilt. Dies für die weiteren Betrachtungen vorausgesetzt. Die Sonderfälle $\cos p = -\cos q$ und $\sin p = \sin q$ werden daher ausgeschlossen. Dann gilt

$$(\sin p + \sin q)(\sin q - \sin p) = (\cos p - \cos q)(\cos p + \cos q) \tag{1}$$

Mit Gl. (AH-2) folgt auf beiden Seiten

$$\sin^2 q - \sin^2 q = \cos^2 p - \cos^2 q \tag{2}$$

Für die rechte Seite von (2) folgt mit (TH-1)

$$\cos^2 p - \cos^2 q = 1 - \sin^2 p - \left(1 - \sin^2 q\right) = \sin^2 q - \sin^2 p \tag{3}$$

Durch die Umformung der rechten Seite von (2) gemäß (3) wird also genau die linke Seite von (2) erhalten. Damit ist der Beweis erbracht.

Formel (T-49)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \tan \frac{p+q}{2}$$

Beweis:

Einsetzen von (T-40) und (T-42) in die linke Seite liefert mit (TH-5)

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} = \tan \frac{p+q}{2}$$

Formel (T-50)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p - \cos q} = \frac{\cos p + \cos q}{\sin q - \sin p}$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt nach dem Muster des Beweises für (T-49)$_1$, wenn $p \neq q$, $\cos p - \cos q = 0$ und $\sin q - \sin p = 0$ sowie $p = q$ ausgeschlossen werden. Durch über Kreuz Multiplizieren folgt

$$(\sin p + \sin q)(\sin q - \sin p) = (\cos p + \cos q)(\cos p - \cos q)$$

und mit (AH-2) und (TH-1)

$$\sin^2 q - \sin^2 p = \cos^2 p - \cos^2 q = 1 - \sin^2 p - \left(1 - \sin^2 q\right) = \sin^2 q - \sin^2 p$$

Durch die algebraische Umformung folgt also aus (T-50)$_1$ die vorstehende Identität, womit diese Formel bewiesen ist.

Formel (T-50)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p - \cos q} = \cot \frac{q - p}{2}$$

Beweis:

Durch Anwenden von (T-40) auf den Zähler der linken Seite und von (T-43) auf deren Nenner und anschließend »*Bronstein*«, S. 80, (2.89) und S. 79, (2.79) folgt

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p - \cos q} = \frac{2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{-2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}} = -\cot \frac{p-q}{2} = \cot \frac{q-p}{2}$$

Damit ist der Beweis geschlossen.

Formel (T-51)$_1$:

Behauptung:

$$\frac{\tan p+\tan q}{\tan p-\tan q}=\frac{\cot p+\cot q}{\cot q-\cot p}$$

Beweis:

Mit Anwenden von »*Bronstein*«, S.80, (2.87) auf die rechte Seite folgt

$$\frac{\cot p+\cot q}{\cot q-coq}=\frac{\frac{1}{\tan p}+\frac{1}{\tan q}}{\frac{1}{\tan q}-\frac{1}{\tan p}}$$

Erweitern der rechten Seite mit $\tan p\tan q$ liefert

$$\frac{\frac{1}{\tan q}+\frac{1}{\tan p}}{\frac{1}{\tan q}-\frac{1}{\tan p}}=\frac{\tan p+\tan q}{\tan p-\tan q}$$

womit der Beweis geschlossen ist.

Formel (T-51)$_2$:

Behauptung:

$$\frac{\tan p+\tan q}{\tan p-\tan q}=\frac{\sin(p+q)}{\sin(p-q)}$$

Beweis:

Vorausgesetzt wird $p\neq q$. Linke Seite von (T-51)$_2$ wird mit $\cos p\cos q$ erweitert

$$\frac{\tan p+\tan q}{\tan p-\tan q}=\frac{\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}}{\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}}=\frac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\sin p\cos q-\sin q\cos p}$$

Mit »*Bronstein*«, S.80, (2.90) folgt

$$\frac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\sin p\cos q-\sin q\cos p}=\frac{\sin(p+q)}{\sin(p-q)}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Formeln $(T\text{-}52)_1$ und $(T\text{-}52)_2$:

Diese beiden Formeln können gemeinsamt bewiesen werden.

Behauptung:

$$\frac{\tan p+\tan q}{\cot p+\cot q}=\frac{\tan p-\tan q}{\cot q-\cot p}=\tan p\tan q$$

Beweis:

Anwendung von $(T\text{-}44)_1$ auf den Zähler und von $(T\text{-}45)_1$ auf den Nenner des linken Terms liefert

$$\frac{\tan p+\tan q}{\cot p+\cot q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}\frac{\sin p\sin q}{\sin(p+q)}=\tan p\tan q \qquad (1)$$

Anwendung von $(T\text{-}44)_2$ auf den Zähler und von $(T\text{-}45)_2$ auf den Nenner des mittleren Terms liefert

$$\frac{\tan p-\tan q}{\cot q-\cot p}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}\left[-\frac{\sin p\sin q}{\sin(q-p)}\right]=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}\frac{\sin p\sin q}{\sin(p-q)}=\tan p\tan q \qquad (2)$$

Da die Umformungen in den Gln. (1) und (2) auf das gleiche Ergebnis $\tan p\tan q$ führen, sind beide Teile der Behauptung bewiesen.

Formeln $(T\text{-}53)_1$ und $(T\text{-}53)_2$:

Diese beiden Formeln können gemeinsam bewiesen werden.

Behauptung:

$$\frac{\tan p+\cot q}{\cot p+\tan q}=\frac{\cot q-\tan p}{\cot p-\tan q}=\tan p\cot q$$

Beweis:

Anwendung von »*Bronstein*«, S. 82, (2.121) auf Zähler und Nenner des ersten Teils der linken Seite gibt unter Beachtung von $\cos(q-p)=\cos(p-q)$

$$\frac{\tan p+\cot q}{\cot p+\tan p}=\frac{\cos(p-q)}{\sin q\cos p}\frac{\sin p\cos q}{\cos(p-q)}=\tan p\cot q$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Anwendung von (T-46)$_2$ und von »*Bronstein*«, S. 82, (2.121) auf Zähler und Nenner des mittleren Teils (im Zähler p und q vertauschen) gibt unter Beachtung von

$$\frac{\cot q-\tan p}{\cot p-\tan q}=\frac{\cos(p+q)}{\sin q\cos p}\frac{\sin p\cos q}{\cos(p+q)}=\tan p\cot q$$

Damit ist nicht nur der erste sondern auch der zweite Teil der Behauptung bewiesen.

Formel (T-54):

Behauptung:

$$\frac{\tan p+\tan q}{\cot p-\tan q}=\tan p\tan(p+q)$$

Beweis:

Umformung der rechten Seite mit (T-32)$_1$ liefert zunächst

$$\tan p\tan(p+q)=\tan p\frac{\tan p+\tan q}{1-\tan p\tan q}=\frac{\tan^2 p+\tan p\tan q}{1-\tan p\tan q}$$

Teilen von Zähler und Nenner des rechten Ausdrucks durch $\tan p$ liefert

$$\frac{\tan^2 p+\tan p\tan q}{1-\tan p\tan q}=\frac{\tan p+\tan q}{\frac{1}{\tan p}-\tan q}=\frac{\tan p+\tan q}{\cot p-\tan p}$$

wobei »*Bronstein*«, S. 80, (2.87) verwendet wurde. Da der rechte Teil von (T-54) sich in den linken umformen lässt, ist die Richtigkeit von (T-54) bewiesen.

Formel (T-55):

Behauptung:

$$\frac{\cot p + \cot q}{\cot p - \tan q} = \cot q \tan\left(p+q\right)$$

Beweis:

Anwenden von $(T\text{-}32)_1$ auf die rechte Seite liefert

$$\cot q \tan\left(p+q\right) = \cot q \frac{\tan p + \tan q}{1 - \tan p \tan q} = \frac{\cot q \tan p + \cot q \tan q}{1 - \tan p \tan q}$$

Der zweite Term im Zähler der rechten Seite ist wegen »*Bronstein*«, S. 80, (2.87) gleich 1 und daher wird durch Teilen von Zähler und Nenner durch $\tan p$ mit $(T\text{-}7)_3$

$$\frac{1 + \tan p \cot q}{1 - \tan p \tan q} = \frac{\dfrac{1}{\tan p} + \cot q}{\dfrac{1}{\tan p} - \tan q} = \frac{\cot p + \cot q}{\cot p - \tan q}$$

Damit ist die Formel von Musil bewiesen.

Formel (T-56):

Behauptung:

$$\frac{\tan p - \tan q}{\cot p + \tan q} = \tan p \tan\left(p-q\right)$$

Beweis:

Mit $(T\text{-}33)_1$ folgt unter Beachtung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.87)

$$\tan p \tan\left(p-q\right) = \tan p \frac{\tan p - \tan q}{1 + \tan p \tan q} = \frac{1}{\cot p} \frac{\tan p - \tan q}{1 + \tan p \tan q} = \frac{\tan p - \tan q}{\cot p + \tan q}$$

Damit ist (T-56) bewiesen.

Formel (T-57):

Behauptung:

$$\frac{\cot q - \cot p}{\tan q + \cot p} = \cot q \tan(p - q)$$

Beweis:

Anwenden von (T-33)$_2$ auf die rechte Seite liefert

$$\cot q \tan(p - q) = \cot q \frac{\cot q - \cot p}{1 + \cot p \cot q} = \frac{\cot^2 q - \cot p \cot q}{1 + \cot p \cot q}$$

Teilen von Zähler und Nenner des letzten Ausdrucks durch $\cot q$ ergibt unter Berücksichtigung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.87)

$$\cot q \tan(p - q) = \frac{\cot q - \cot p}{\cot p + \tan q}$$

Damit ist der Beweis geführt

Formel (T-58):

Behauptung:

Formel (T-58) umfasst zwei Formeln, die sich wie folgt kompakter in einer Gleichung angeben lassen.

$$1 \pm \tan p \tan q = \frac{\cos(p \mp q)}{\cos p \cos q}$$

Beweis:

Nach (T-30) und (T-31) gilt

$$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q$$

und damit wird unter Beachtung von »*Bronstein*«, S. 80, (2.88)

$$\frac{\cos(p \mp q)}{\cos p \cos q} = \frac{\cos p \cos q \pm \sin p \sin q}{\cos p \cos q} = 1 \pm \tan p \tan q$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Formel (T-59)$_1$:

Behauptung:

$$\sin(p+q)\sin(p-q) = \sin^2 p - \sin^2 q$$

Beweis:

Nach (TH-2) gilt für die linke Seite

$$\sin(p+q)\sin(p-q) = (\sin p \cos q + \cos p \sin q)(\sin p \cos q - \cos p \sin q) \qquad (1)$$

Werden in (1) auf der rechten Seite $a = \sin p \cos q$ und $b = \cos p \sin q$ gesetzt so folgt aus (AH-2)

$$\sin(p+q)\sin(p-q) = \sin^2 p \cos^2 q - \cos^2 p \sin^2 q \qquad (2)$$

Mit (TH-1) ergibt sich für die rechte Seite von (2)

$$\sin^2 p \cos^2 q - \cos^2 p \sin^2 q = \sin^2 p\left(1-\sin^2 q\right) - \left(1-\sin^2 p\right)\sin^2 q = \sin^2 p - \sin^2 q$$

Damit ist (T-59)$_1$ bewiesen.

Formel (T-59)$_2$:

Behauptung:

$$\sin^2 p - \sin^2 q = \frac{1}{2}(\cos 2q - \cos 2p)$$

Beweis:

Nach »*Bronstein*«, S. 83, (2.130) gilt

$$\sin^2 p = \frac{1}{2}(1-\cos 2p)$$

und eine entsprechende Beziehung für $\sin^2 q$. Damit folgt

$$\sin^2 p - \sin^2 q = \frac{1}{2}\left[1-\cos 2p - (1-\cos 2q)\right] = \frac{1}{2}(\cos 2q - \cos 2p)$$

Damit ist der Beweis geschlossen.

Formel (T-60)$_1$:

Behauptung:

$$\cos(p+q)\cos(p-q) = \cos^2 p - \sin^2 q$$

Beweis:

Mit (TH-3) folgt

$$\cos(p+q)\cos(p-q) = (\cos p\cos q - \sin p\sin q)(\cos p\cos q + \sin p\sin q)$$

Wird $a = \cos p\cos q$ und $b = \sin p\sin q$ gesetzt, so folgt aus (AH-2)

$$\cos(p+q)\cos(p-q) = \cos^2 p\cos^2 q - \sin^2 p\sin^2 q$$

Durch Anwenden von (TH-1) ergibt sich

$$\begin{aligned}\cos^2 p\cos^2 q - \sin^2 p\sin^2 q &= \cos^2 p\left(1-\sin^2 q\right) - \left(1-\cos^2 p\right)\sin^2 q\\ &= \cos^2 p - \cos^2 p\sin^2 q - \sin^2 q + \cos^2 p\sin^2 q\\ &= \cos^2 p - \sin^2 q\end{aligned}$$

Damit ist (T-60)$_1$ bewiesen.

Formel (T-60)$_2$:

Behauptung:

$$\cos(p+q)\cos(p-q)=\frac{1}{2}(\cos 2q-\sin 2p)$$

Beweis:

Nach (T-60)$_1$ gilt

$$\cos(p+q)\cos(p-q)=\cos^2 p-\sin^2 q$$

Nach »*Bronstein*«, S. 83, (2.130) und (2.131) gilt

$$\cos^2 p=\frac{1}{2}(1+\cos 2p)$$
$$\sin^2 q=\frac{1}{2}(1-\cos 2q)$$

Damit folgt aus

$$\cos^2 p-\sin^2 q=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2p-(1-\cos 2q)\right]=\frac{1}{2}(\cos 2p+\cos 2q)$$

Bei Musil steht

$$\cos^2 p-\sin^2 q=\frac{1}{2}(\cos 2p-\sin 2q)$$

Bemerkung: Diese Formel enthält zwei Fehler:

1. Das Vorzeichen des zweiten Terms auf der rechten Seite ist falsch (richtig + statt -).
2. Anstelle der korrekten Funktion $\cos 2q$ steht die falsche Funktion $\sin 2q$.

Formel (T-61):

Behauptung:

$$\sin(p+q)\cos(p-q)=\frac{1}{2}(\sin 2p+\sin 2q)$$

Beweis:

Mit (TH-2) und (TH-3) folgt

$$\begin{aligned}\sin(p+q)\cos(p-q) &= (\sin p\cos q+\cos p\sin q)(\cos p\cos q+\sin p\sin q)\\ &= \sin p\cos p\cos^2 q+\sin^2 p\sin q\cos q+\cos^2 p\sin q\cos q+\cos p\sin p\sin^2 q\\ &= \sin p\cos p\left(\cos^2 q+\sin^2 q\right)+\sin q\cos q\left(\sin^2 p+\cos^2 p\right)\\ &= \sin p\cos p+\sin q\cos q\end{aligned}$$

Nach »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) gilt

$$\sin p\cos p=\frac{1}{2}\sin 2p$$

Mit dem entsprechenden Ausdruck für $\sin q\cos q$ folgt

$$\sin p\cos p+\sin q\cos q=\frac{1}{2}(\sin 2p+\sin 2q)$$

Damit ist (T-61) bewiesen.

<u>Formel (T-62)</u>:

<u>Behauptung:</u>

$$\sin(p-q)\cos(p+q)=\frac{1}{2}(\sin 2p-\sin 2q)$$

<u>Beweis:</u>

Mit (TH-2) und (TH-3) folgt für die linke Seite der Behauptung

$$\begin{aligned}\sin(p-q)\cos(p+q) &= (\sin p\cos q-\cos p\sin q)(\cos p\cos q-\sin p\sin q)\\ &= \sin p\cos p\cos^2 q-\sin^2 p\sin q\cos q-\cos^2 p\sin q\cos q+\sin^2 q\sin p\cos p\end{aligned}$$

Für die rechte Seite folgt mit (TH-1)

$$\begin{aligned}\sin(p-q)\cos(p+q) &= \sin p\cos p\left(\sin^2 q+\cos^2 q\right)-\sin q\cos q\left(\sin^2 p+\cos^2 p\right)\\ &= \sin p\cos p-\sin q\cos q\end{aligned}$$

Nach »*Bronstein*«, S. 81, (2.96) gilt

$$\sin p \cos p = \frac{1}{2}\sin 2p \qquad\qquad \sin q \cos q = \frac{1}{2}\sin 2q$$

Daher wird

$$\sin(p-q)\cos(p+q) = \sin p \cos p - \sin q \cos q = \frac{1}{2}(\sin 2p - \sin 2q)$$

und der Beweis ist geschlossen.

Formel (T-63):

Behauptung:

$$\begin{aligned}\frac{\cos mu}{\cos^m u} &= \binom{m}{0} - \binom{m}{2}\tan^2 u + \binom{m}{4}\tan^4 u - \binom{m}{6}\tan^6 u + \ldots \\ &= 1 - \binom{m}{2}\tan^2 u + \binom{m}{4}\tan^4 u - \binom{m}{6}\tan^6 u + \ldots\end{aligned}$$

Dabei wird von der Beziehung

$$\binom{m}{0} = 1$$

Gebrauch gemacht.

Vorbemerkungen:

1. Im zweiten Term auf der rechten Seite verwendet Musil für die trigonometrische Funktion Tangens einmal die Abkürzung „tang“, die sonst in seinem Manuskript und daher auch in (T-63) nicht auftaucht.

2. Die Formel (T-63) findet sich in der von Musil verwendeten Notation für die Binomialkoeffizienten in einem Buch von Schlömilch[4]. Dort erfolgt die Ableitung der Formel (T-63) durch $n-$maliges Differenzieren des Ausdrucks[5] $u/(\alpha^2 + \beta^2 u^2)$ und anschließende Setzung $\omega = \arctan[\alpha/(\beta u)]$. Nachstehend wird eine elementare Ableitung der Formel (T-63) angegeben.

[4] Schlömilch, Oskar, Literaturangabe in Abschnitt „Einleitung“ zu dem Gesamtkommentar, vgl. dort Fußnote 2.

[5] Schlömilch bezeichnet die unabhängige Variable mit *x* anstelle von *u*.

3. Es wird vermutet, dass Musil die Formel (T-63) aus dem in Ziffer 2. zitierten Buch von Schlömilch übernommen hat, weil auch dort das konstante Glied in der Schreibweise $(m)_0$ angegeben wird.

<u>Beweis:</u>

Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.109) findet sich folgende Formel (umgeschrieben auf die Notation von Musil (Variable *u* anstelle von *x,* Binomialkoeffizienten in der heute üblichen Schreibweise)

$$\cos mu = \cos^m u - \binom{m}{2}\cos^{m-2} u \sin^2 u + \binom{m}{4}\cos^{m-4} u \sin^4 u - \binom{m}{6}\cos^{m-6} u \sin^6 u + \cdots \tag{1}$$

Einsetzen von (1) in die Behauptung liefert sofort

$$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = \frac{\cos^m u - \binom{m}{2}\cos^{m-2} u \sin^2 u + \binom{m}{4}\cos^{m-4} u \sin^4 u - \binom{m}{6}\cos^{m-6} u \sin^6 u + \cdots}{\cos^m u} \tag{2}$$

Werden die Terme im Zähler durch $\cos^m u$ geteilt, so folgt

$$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = 1 - \binom{m}{2}\tan^2 u + \binom{m}{4}\tan^4 u - \binom{m}{6}\tan^6 u + \cdots \tag{3}$$

Gl. (3) ist identisch mit der Behauptung.

<u>Bemerkung:</u>

Es ist zu beachten, dass (3) keine unendliche Reihe darstellt. Für gerade Zahlen $m = 2k \cdots k = 1, 2, \ldots m/2$ bricht sie mit dem Glied $\tan^m u$ ab, für ungerade $m = 2k + 1$ mit $\tan^{2k} u = \tan^{m-1} u$.

Formel (T-64):

Behauptung:

$$\frac{\sin mu}{\sin^m u} = \binom{m}{1}\tan u - \binom{m}{3}\tan^3 u + \binom{m}{5}\tan^5 u - \ldots$$

Analyse:

Es lässt sich sehr einfach zeigen, dass diese Formel falsch ist. Wird nämlich der Grenzwert $\lim\limits_{u\to 0}\sin mu / \sin^m u$ gebildet, so ergibt sich der unbestimmte Ausdruck 0/0. Durch Anwenden der Regel von L'Hospital (vgl. hierzu im Abschnitt „Grenzwerte" Formel (GA-1) und im Abschnitt „Differenzialquotienten" Formeln (DA-10), (DA-6), und (DA-14) des vorliegenden Kommentars) ergibt sich

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin mu}{\sin^m u} = \lim_{u\to 0}\frac{d\left(\sin mu\right)/du}{d\left(\sin^m u\right)/du} = \lim_{u\to 0}\frac{m\cos mu}{m\sin^{m-1} u\cos u} \to \infty$$

Da $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$ sind, geht das Ergebnis gegen Unendlich (∞). Die Funktion $\tan u$ und ihre Potenzen können dieses Verhalten nicht repräsentieren, denn $\tan 0 = 0$ Erst recht nehmen alle Potenzen $\tan^k u \quad k > 0 \quad k =$ natürliche Zahl für $u = 0$ den Wert 0 an ($\tan^k 0 = 0$).

Für die Behauptung lässt sich die korrekte Formel wie folgt angeben. Bei »*Bronstein*«, S. 81, (2.110) findet sich folgende Beziehung (umgeschrieben auf die hier verwendete Notation)

$$\sin mu = m\cos^{m-1} u \sin u - \binom{m}{3}\cos^{m-3} u \sin^3 u + \binom{m}{5}\cos^{m-5} u \sin^5 u - \cdots \qquad (1)$$

Dividieren von (1) auf beiden Seiten mit $\sin^m u$ liefert

$$\frac{\sin mu}{\sin^m u} = m\cot^{m-1} u - \binom{m}{3}\cot^{m-3} u + \binom{m}{5}\cot^{m-5} u - \cdots \qquad (2)$$

Die Reihe auf der rechten Seite von (2) zeigt das richtige Verhalten für $u \to 0$, denn es gilt $\lim\limits_{u\to 0}\cot u \to \infty$. Die Reihe auf der rechten Seite von (2) bricht für ungerade

Exponenten mit dem Term $\binom{m}{m}\cot^0 u = 1$ ab. Für gerade Exponenten lautet der letzte Term $\binom{m}{m-1}\cot u = m\cot u$.

Abschlussbemerkungen zu (T-64)

1. Es kann vermutet werden, dass Musil die folgende, bei Schlömilch[6] stehende Formel

$$\frac{\sin mu}{\cos^m u} = \binom{m}{1}\tan u - \binom{m}{3}\tan^3 u + \binom{m}{5}\tan^5 u - \cdots$$

übernehmen wollte und ihm dabei ein Übertragungsfehler unterlaufen ist (Verwechslung von $\cos^m u$ mit $\sin^m u$). In diesem Fall wäre ihm ein allerdings folgenschwerer Übertragungsfehler unterlaufen.

2. Dass Musil den fundamentalen Fehler in seiner Formel (T-64) - Versagen für den Grenzübergang $u \to 0$ - nicht erkannt hat, zeigt, dass Musil - entgegen der häufig in der Sekundärliteratur geäußerten Meinung - kein Mathematiker war. Darauf hat der Verfasser[7] an anderer Stelle ausführlich hingewiesen.

Abschließende Bemerkung zu den Formeln (T-63) und (T-64):

1. Schlömilch[8] schreibt zu der von ihm angegeben korrekten Formel (T-64), dass in ihr „*ein oft gebrauchter goniometrischer Satz liegt.*“

2. Für den Verfasser besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass Musil die beiden Formeln (T-63) und (T-64) von Schlömilch[9] übernommen hat.

3. Der Verfasser vermutet, dass Musil die beiden Formeln (T-63) und (T-64) erst nach der Niederschrift aller anderen trigonometrischen Formeln eingefügt hat. Hierfür sprechen die beiden folgenden Gründe:

   a) Diesen beiden Formeln hat Musil anders als bei allen anderen trigonometrischen Formeln keine Gleichungsnummern zugeordnet.

   b) Die Schrift der beiden Formeln ist deutlich kleiner als die der darüber stehenden, was ebenfalls für ein späteres Einfügen spricht.

[6] Schlömilch, O., a. a. O., S. 27
[7] Franz Gustav Kollmann: Robert Musil und die Mathematik, Akademie der Wissenschaften und der Literatur Mainz, Abhandlungen der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse, Nr. 1, 2007, S. 36f,
[8] Schlömilch, a.a. O. S. 27.
[9] Schlömilch, a. a. O. S. 28 bzw. 27