Franz Gustav Kollmann: *Transkription und Kommentare zu den von Musil im "Register"-Heft notierten Formeln. Transkription*. Akademie der Wissenschaften und der Literatur | Mainz (Hrsg.), 2017.
URN: urn:nbn:de:0238-musil-formeln-3-transkription_9.

3. Transkription

Franz Gustav Kollmann
München

3.1 Einleitende Vorbemerkungen zur Transkription

Die Formeln stammen aus den folgenden mathematischen Gebieten:

- Trigonometrie (p. 1 - 4)
- Kettenbrüche (p. 5)
- Grenzwerte (p. 6 - 7)
- Differentialquotienten (p. 8 – 13)
- Tangenten und Normalen (p. 16 – 17)

Die folgende Tabelle 1 zeigt die Anzahl der für die einzelnen Sachgebiete notierten Formeln.

Tabelle 1: Anzahl der für die einzelnen Sachgebiete notierten Formeln

Sachgebiet	**Kennzeichnender Buchstabe**	**Anzahl Formeln**
Trigonometrie	T	137
Kettenbrüche	K	24
Grenzwerte	G	31
Differenzialquotienten	D	114
Tangenten und Normalen	TN	6
Gesamtanzahl Formeln		**312**

Bei der Angabe der Anzahl der Formeln wird wie folgt verfahren. Grundsätzlich besteht in der Mathematik eine Formel oder Gleichung aus einer linken und einer rechten Seite, die durch ein Gleichheitszeichen (=) getrennt werden. Derartige Formeln finden sich im Heft 37 [z. B. die Formeln (T-11)[1], (T-20) mit (T-23)]. Weiter notiert Musil mehrere Formeln in einer Zeile [z. B. 3 in (T 1) und (T-2), sowie 2 in (T-3). Dann gibt es hinter einander angeordnete Formeln, die sich über mehrere Zeilen erstrecken. Derartige Agglomerate, bei denen Musil mehreren Formeln nur eine Nummer zugeordnet hat, werden hier als „Formelgruppen“ bezeichnet. Beispiele derartiger Formelgruppen sind die mit (T-1) gekennzeichneten Formeln (3 Formeln in einer Zeile) sowie (T-4) und (T-5) (je 6 individuellen Formeln). Schließlich gibt Musil bei einigen Formeln Voraussetzungen an, die ebenfalls in der Form von Gleichungen angeschrieben werden. Derartige Voraussetzungen werden nicht als eigene Formeln gewertet. Sie erhalten daher in der Transkription keine eigene Gleichungsnummer sondern werden der auf sie nachfolgenden Formel zugeordnet. Die Zählung wird für derartige Fälle an zwei Beispielen erläutert Zunächst wird die Formelgruppe (D-1) betrachtet.

$$y = x^{\alpha} \quad : \quad \frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \qquad y = \sin x \quad : \quad y' = \cos x \tag{D-1}$$

Die beiden Gleichungen $y = x^{\alpha}$ und $y = \sin x$ sind die Voraussetzungen, in denen

[1] Die Vergabe der Nummern für die einzelnen Formeln wird in diesem Abschnitt weiter unten erläutert.

die Funktionen $y = y(x)$ definiert werden. Zu der Funktion $y = x^{\alpha}$ gehört die Ableitung $dy/dx = \alpha x^{\alpha-1}$ und entsprechend zu der Funktion $y = \sin x$ die Ableitung $y' = \cos x$. Also umfasst die Formelgruppe (D1) nur 2 und nicht 4 Formeln. Als weiteres Beispiel wird die Formel (D-37) betrachtet, Die zugehörige Voraussetzung lautet

$$y = f\left[u(z), v(z_1)\right] \ldots z(x), z_1(x)$$

Sie erhält keine eigene Gleichungs- bzw. Formelnummer. Die eigentliche Formelgruppe (D-37) steht eine Zeile tiefer

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dx} \qquad \text{(D-37)}$$

Sie umfasst 3 Formeln, wie leicht abzuzählen ist. Abschließend wird darauf hingewiesen, dass die Zuweisung von Zählern für die Anzahl von Formeln in einer Formelgruppe einen gewissen Interpretationsspielraum zulässt. Daher ist es möglich, dass bei der Feststellung der Anzahl der insgesamt von Musil notierten Formeln gewisse, allerdings geringe Differenzen auftreten können.

Innerhalb der einzelnen Gebiete vergibt Musil teilweise Nummern. In der Transkription werden diese Nummern am linken Seitenrand angegeben. Dabei vergibt Musil die Nummern nicht wie heute üblich innerhalb runder Klammern, sondern schreibt 1.) usw. Ferner schreibt er meistens mehrere Formeln in eine Zeile, die dann – wie bereits ausgeführt – als Formelgruppen bezeichnet werden. Jedoch vergibt Musil nicht zu allen Formeln Nummern. Wenn diese Formelgruppen nummeriert werden, wird die Nummer von Musil linksbündig vor Beginn der ersten Formel notiert. Diese Schreibweise wird in der Transkription beibehalten. Manchmal notiert Musil zu gleichen Nummer noch Formeln in einer zweiten Zeile. Bei der Transkription konnte aus Platzgründen die Verteilung der Formeln auf eine oder zwei Zeilen nicht 1:1 umgesetzt werden.

Mit Hilfe der von Musil vergebenen Nummern lassen sich die Formeln nicht eindeutig ansprechen, weil er zu Beginn eines neuen mathematischen Gebietes die Nummerierung erneut beginnt und weil er Formelgruppen nur eine einzige Nummer zuweist, so dass einzelne Formeln innerhalb einer Formelgruppe nicht angesprochen werden können. Für das Sachgebiet „Grenzwerte“ vergibt Musil überhaupt keine Nummern. Um ein eindeutiges Ansprechen der Formeln zu ermöglichen, werden rechtsbündig zeilenweise in Klammern gesetzte Nummern für die Formeln bzw. Formelgruppen vergeben. Dabei wird zunächst das mathematische Gebiet gemäß Tabelle 1 durch Großbuchstaben gekennzeichnet:

Hinter dem kennzeichnenden Buchstaben folgt nach einem Bindestrich deren Nummer, also z. B. (T-1). Sind mehrere Formeln von Musil in einer Formelgruppe angeordnet, so erhält diese eine einzige Formelnummer. Innerhalb dieser Formelgruppe werden die einzelnen Formeln durch tief gestellte Indizes angegeben. Der Index wird fortlaufend vom Beginn der Formelgruppe gezählt. Beispielsweise enthält die Formelgruppe (T-5) insgesamt 5 einzelne Formeln. Dabei ist die Formelgruppe (T-5) so zu interpretieren, dass der links oben stehenden Funktion $\cos p$ 6 einzelne Formeln zugeordnet werden, in denen sie durch andere Funktionen ausgedrückt wird. Dann wird die dritte Formel durch $(T\text{-}5)_3$ angegeben. Die Formel $(T\text{-}5)_3$ lautet daher in der Schreibweise der Transkription

$$\cos p = \frac{\operatorname{ctg} p}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 p}}$$

Im Kommentar wird $(T\text{-}5)_3$ wie folgt angeschrieben[2]

$$\cos p = \frac{\cot p}{\sqrt{-\cot^2 p}}$$

Ferner ist es erforderlich, im Kommentar innerhalb der Beweise von einzelnen Formelgruppen Hilfsbezeichnungen einzuführen, um Zwischenrechnungen anzusprechen. Dies erfolgt durch in Klammern gesetzte Zahlen (1), (2) usw. Diese Zahlen heißen Gleichungsnummern. Sie werden für jede Formel neu vergeben.

Schließlich müssen im Kommentar innerhalb der Beweise für einzelne Formeln häufig Bezüge zu den im vorstehenden Absatz erwähnten Gleichungsnummern angegeben werden. Dies geschieht durch Ausdrücke der Form „Gl. (1)“, Gl. (2) usw. Die Abkürzung „Gl.“ bedeutet – wie in der mathematischen Literatur üblich – „Gleichung“. Der Plural „Gleichungen“ wird abgekürzt mit „Gln.“.

Die Paginierung beginnt in den einzelnen Hauptabschnitten[3] „Trigonometrische Funktionen“, „Kettenbrüche“, „Grenzwerte“, „Differentialquotienten“ sowie „Tangenten und Normalen“ jeweils mit der Seite 1. Es gibt daher innerhalb des Corpus des gesamten Kommentars keine fortlaufende Paginierung.

Gelegentlich ist es erforderlich, in der Transkription Musils Formeln aus Gründen der mathematischen Richtigkeit oder der Einheitlichkeit durch Einfügungen zu vervollständigen. Grundsätzlich werden in der Transkription alle eingefügten Zeichen in geschweifte Klammern $\{\ \}$ gesetzt. Sofern Zeichen aus Gründen der mathematischen Richtigkeit eingefügt werden, wird im Kommentar für die betreffenden Formeln darauf hingewiesen. Sofern die in geschweifte Klammern gesetzten Zeichen lediglich aus Gründen der Vereinheitlichung der Schreibweise eingefügt werden, unterbleiben Hinweise.

Bei Produkten von zwei mathematischen Ausdrücken kann zwischen diese Ausdrücke ein Malpunkt $\cdot$ gesetzt werden (z. B. $\sin p \cdot \cos p$). Dieser Malpunkt kann auch entfallen (z. B. $\sin p \cos p$). Beide Schreibweisen sind korrekt und beide finden sich bei Musil. Daher wird in der Transkription i. a. Musils Schreibweise umgesetzt. Jedoch gibt es Formeln, welche Summen von zwei Produkten enthalten. In solchen Formeln kommt es vor, dass Musil in einem Produkt den Malpunkt setzt und im zweiten weglässt. Ein Beispiel hierfür ist die Formel (T-30). In Musils Notation lautet sie

[2] Die von Musil verwendete Schreibweise ctg für die Funktion Cotangens ist veraltet. Diese Funktion wird heute als cot notiert.
[3] Die Hauptabschnitte werden hier in der Reihenfolge angegeben, wie sie Musil im Heft 37 notiert hat (vgl. hierzu Teil Faksimiles dieser Präsentation).

$$\cos(p+q) = \cos p \cdot \cos q - \sin p \sin q$$

Im Sinne der Vereinheitlichung wird diese Formel in der Transkription wie folgt angegeben

$$\cos(p+q) = \cos p \cdot \cos q - \sin p \{\cdot\} \sin q$$

Wichtiger Hinweis zur Paginierung

Musils Seiten können aus programmtechnischen Gründen nicht 1:1 in der Transkription übernommen werden. Vielmehr muss öfters eine Seite Musils in der Transkription auf zwei Seiten aufgeführt werden. Um die von Musil gewählte Einteilung der Seiten möglichst genau in der Transkription widerzugeben, wird für den Fall dass Musils Seite in der Transkription auf der jeweils zweiten Seite am Ende von Musils Formeln ein Seitenumbruch vorgenommen. Z. B. wird Musils Seite 1 der Trigonometrischen Formel in der Transkription auf die zwei Seiten 5 und 6 aufgeteilt. Danach folgen für Musils Seite 2 in der Transkription die Seiten 7 und 8 mit einem Seitenumbruch auf Seite 8.

3.2 Transkription

1

<u>Trigonometrische Formeln</u>

1.) $$\sin^2 p + \cos^2 p = 1; \quad \operatorname{tang} p \cdot \operatorname{ctg} p = 1; \quad \sec p \cdot \cos p = 1 \qquad \text{(T-1)}$$

2.) $$\operatorname{cosec} p \cdot \sin p = 1, \quad \sec^2 p - \operatorname{tg}^2 p = 1; \quad \operatorname{cosec}^2 p - \operatorname{cotg}^2 p = 1 \qquad \text{(T-2)}$$

3.) $$\sin\cdot \operatorname{vers} \cdot p + \cos p = 1; \quad \cos \operatorname{vers} p + \sin p = 1 \qquad \text{(T-3)}$$

4.) $$\sin p = \sqrt{\left(1-\cos^2 p\right)} = \frac{\operatorname{tg} p}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 p}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 p}} = \qquad \text{(T-4)}$$

$$\frac{\sqrt{\sec^2 p - 1}}{\sec p} = \frac{1}{\operatorname{cosec} p} = \cos p \cdot \operatorname{tg} p \qquad -$$

5.) $$\cos p = \sqrt{1-\sin^2 p} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 p}} = \frac{\operatorname{ctg} p}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 p}} = \qquad \text{(T-5)}$$

$$\frac{1}{\sec p} = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}}{\operatorname{cosec} p} = \sin p \cdot \operatorname{ctg} p.$$

6.) $$\operatorname{tg} p = \frac{\sin p}{\sqrt{1-\sin^2 p}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 p}}{\cos p} = \frac{1}{\operatorname{cotg} p} = \qquad \text{(T-6)}$$

$$\sqrt{\sec^2 p - 1} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 - 1}}.$$

7.) $$\operatorname{cotg} p = \frac{\sqrt{1-\sin^2 p}}{\sin p} = \frac{\cos p}{\sqrt{1-\cos^2 p}} = \frac{1}{\operatorname{tang} p} = \qquad \text{(T-7)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 p - 1}} = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}.$$

8.) $$\sec p = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 p}} = \frac{1}{\cos p} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 p} = \qquad \text{(T-8)}$$

$$\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 p}}{\operatorname{ctg} p} = \frac{\operatorname{cosec} p}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 p - 1}} = \frac{\operatorname{tg} p}{\sin p}.$$

9.) $$\operatorname{cosec} p = \frac{1}{\sin p} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 p}} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 p}}{\operatorname{tg} p} = \qquad \text{(T-9)}$$

$$\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 p} = \frac{\sec p}{\sqrt{\sec^2 p - 1}} = \frac{\mathrm{ctg}\, p}{\cos p}.$$

10.) $$\sin\mathrm{vers}\, p = 1 - \cos p = 2\sin^2\frac{p}{2} \tag{T-10}$$

11.) $$\cos\mathrm{vers}\, p = 1 - \sin p = 2\sin^2(45^\circ - \frac{p}{2}) \tag{T-11}$$

12.) $$\sin\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos p}\,; \quad \cos\frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos p} \tag{T-12}$$

13.) $$\mathrm{tg}\frac{1}{2}p = \frac{\sin p}{1+\cos p}; \quad \mathrm{cotg}\frac{1}{2}p = \frac{\sin p}{1-\cos p}. \tag{T-13}$$

14.) $$\sin p + \cos p = \sqrt{1+\sin 2p} = \cos(45 - p)\cdot\sqrt{2} \tag{T-14}$$

15.) $$\cos p - \sin p = \sqrt{1-\sin 2p} = \sin(45^\circ - p)\cdot\sqrt{2} \tag{T-15}$$

16.) $$\mathrm{tg}\, p + \mathrm{ctg}\, p = 2\,\mathrm{cosec}\, 2p; \quad \mathrm{ctg}\, p - \mathrm{tg}\, p = 2\,\mathrm{ctg}\, 2p \tag{T-16}$$

2

Trigonometrische Formeln

17.) $$1+\sin p = 2\sin^2(45^\circ + \frac{1}{2}p) \quad 1-\sin p = 2\sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}p)$$ (T-17)

18.) $$\frac{1+\sin p}{1-\sin p} = \mathrm{tg}^2(45^\circ + \frac{1}{2}p) \quad \frac{1+\sin p}{\cos p} = \mathrm{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}p)$$ (T-18)

19.) $$\frac{1+\mathrm{tg}\,p}{1-\mathrm{tg}\,p} = \mathrm{tg}(45^\circ + p) \quad \frac{1-\mathrm{tg}\,p}{1+\mathrm{tg}\,p} = \mathrm{tg}(45^\circ - p)$$ (T-19)

20.) $$\sin(30^\circ + p) = \cos p - \sin(30^\circ - p)$$ (T-20)

21.) $$\cos(30^\circ + p) = \cos(30^\circ - p) - \sin p$$ (T-21)

22) $$\sin(60^\circ - p) = \sin(60^\circ + p) - \sin p$$ (T-22)

23) $$\cos(60^\circ - p) = \cos p - \cos(60^\circ + p)$$ (T-23)

24.) $$2\sin^2 p = 1 - \cos 2p$$ (T-24)
$$4\sin^3 p = 3\sin p - \sin 3p$$
$$8\sin^4 p = \cos 4p - 4\cos 2p + 3$$
$$16\sin^5 p = \sin 5p - 5\sin 3p + 10\sin p$$

25) $$2\cos^2 p = 1 + \cos 2p$$ (T-25)
$$4\cos^3 p = \cos 3p + 3\cos p$$
$$8\cos^4 p = \cos 4p + 4\cos 2p + 3$$
$$16\cos^5 p = \cos 5p - 5\cos 3p + 10\cos p$$

26.) $$\sin 2p = 2\sin p\cos p$$ (T-26)
$$\sin 3p = 3\sin p \cdot \cos^2 p - \sin^3 p$$
$$\sin 4p = 4\sin p \cdot \cos p(\cos^2 p - \sin^2 p)$$
$$\sin n\,p = \sin(n-1)\,p \cdot \cos p + \cos(n-1)\,p \cdot \sin p$$

27) $$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p = 2\cos^2 p - 1 = 1 - 2\sin^2 p$$ (T-27)
$$\cos 3p = \cos^3 p - 3\sin^2 p \cdot \cos p$$
$$\cos 4p = \cos^4 p - 6\sin^2 p[\cdot]\cos^2 p + \sin^4 p$$
$$\cos n\,p = 2\cos(n-1)p \cdot \cos p - \cos(n-2)\,p$$

B.

28) $$\sin(p+q) = \sin p\cos q + \cos p\sin q$$ (T-28)

29) $$\sin(p-q)=\sin p\cos q-\cos p\cdot\sin p$$ (T-29)

3

Trigonometrische Formeln

30.) $$\cos(p+q) = \cos p \cdot \cos q - \sin p\left[\cdot\right]\sin q \qquad \text{(T-30)}$$

31) $$\cos(p-q) = \cos p \cdot \cos q + \sin p\left[\cdot\right]\sin q \qquad \text{(T-31)}$$

32) $$\operatorname{tg}(p+q) = \frac{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q}{1 - \operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tg} q} = \frac{\operatorname{ctg} p + \operatorname{ctg} q}{\operatorname{ctg} p \cdot \operatorname{ctg} q - 1} \qquad \text{(T-32)}$$

33) $$\operatorname{tg}(p-q) = \frac{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q}{1 + \operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tg} q} = \frac{\operatorname{ctg} q - \operatorname{ctg} p}{\operatorname{ctg} p\left[\cdot\right]\operatorname{ctg} q + 1} \qquad \text{(T-33)}$$

34) $$\operatorname{ctg}(p+q) = \frac{\operatorname{ctg} p \cdot \operatorname{ctg} q - 1}{\operatorname{ctg} p + \operatorname{ctg} q} = \frac{1 - \operatorname{tg} p\left[\cdot\right]\operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q} \qquad \text{(T-34)}$$

35) $$\operatorname{ctg}(p-q) = \frac{\operatorname{ctg} p\left[\cdot\right]\operatorname{ctg} q + 1}{\operatorname{ctg} q - \operatorname{ctg} p} = \frac{1 + \operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q} \qquad \text{(T-35)}$$

36) $$\sin p \cdot \sin q = \frac{1}{2}\cos(p-q) - \frac{1}{2}\cos(p+q) \qquad \text{(T-36)}$$

37) $$\cos p \cdot \cos q = \frac{1}{2}\cos(p-q) + \frac{1}{2}\cos(p+q) \qquad \text{(T-37)}$$

38) $$\sin p \cdot \cos q = \frac{1}{2}\sin(p+q) + \frac{1}{2}\sin(p-q) \qquad \text{(T-38)}$$

39) $$\cos p \cdot \sin q = \frac{1}{2}\sin(p+q) - \frac{1}{2}\sin(p-q) \qquad \text{(T-39)}$$

40) $$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q) \cdot \cos\frac{1}{2}(p-q) \qquad \text{(T-40)}$$

41) $$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q) \cdot \sin\frac{1}{2}(p-q) \qquad \text{(T-41)}$$

42) $$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\left[\cdot\right]\cos\frac{1}{2}(p-q) \qquad \text{(T-42)}$$

43) $$\cos q - \cos p = 2\sin\frac{1}{2}(p+q) \cdot \sin\frac{1}{2}(p-q) \qquad \text{(T-43)}$$

44) $$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}; \qquad \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q} \qquad \text{(T-44)}$$

45) $$\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \cdot \sin q}; \qquad \cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \cdot \sin q} \tag{T-45}$$

46) $$\cot p + \operatorname{tg} q = \frac{\cos(p-q)}{\sin p \left[p\right] \cos q}; \qquad \cot p - \operatorname{tg} q = \frac{\cos(p+q)}{\sin p \cdot \cos q} \tag{T-46}$$

47) $$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-q)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(p+q)\left[\cdot\right]\cot\frac{1}{2}(p-q) \tag{T-47}$$

48) $$\frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} = \frac{\cot\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(q-p)} = \cot\frac{1}{2}(p+q)\left[\cdot\right]\cot\frac{1}{2}(q-p) \tag{T-48}$$

4

Trigonometrische Formeln

49) $$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{\cos p-\cos q}{\sin q-\sin p}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p+q)$$ (T-49)

50) $$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p-\cos q}=\frac{\cos q+\cos p}{\sin q-\sin p}=\cot\frac{1}{2}(\mathrm{q}-\mathrm{p})$$ (T-50)

51) $$\frac{\operatorname{tg} p+\operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} p-\operatorname{tg} q}=\frac{\cot \mathrm{p}+\cot \mathrm{q}}{\cot \mathrm{q}-\cot \mathrm{p}}=\frac{\sin(p+q)}{\sin(p-q)}$$ (T-51)

52) $$\frac{\operatorname{tg} p+\operatorname{tg} q}{\cot \mathrm{p}+\cot \mathrm{q}}=\frac{\operatorname{tg} p-\operatorname{tg} q}{\cot \mathrm{q}-\cot \mathrm{p}}=\operatorname{tg} p\cdot\operatorname{tg} q$$ (T-52)

53) $$\frac{\operatorname{tg} p+\cot \mathrm{q}}{\cot p+\operatorname{tg} q}=\frac{\cot \mathrm{q}-\operatorname{tg}\mathrm{p}}{\cot \mathrm{p}-\operatorname{tg}\mathrm{q}}=\operatorname{tg} p\cdot\cot \mathrm{q}$$ (T-53)

54) $$\frac{\operatorname{tg} p+\operatorname{tg} q}{\cot \mathrm{p}-\operatorname{tg}\mathrm{q}}=\operatorname{tg} p\cdot\operatorname{tg}(p+q)$$ (T-54)

55) $$\frac{\cot \mathrm{p}+\cot \mathrm{q}}{\cot \mathrm{p}-\operatorname{tg}\mathrm{q}}=\cot \mathrm{q}\cdot\operatorname{tg}(\mathrm{p}+\mathrm{q})$$ (T-55)

56) $$\frac{\operatorname{tg} p-\operatorname{tg} q}{\cot \mathrm{p}+\operatorname{tg}\mathrm{q}}=\operatorname{tg} p\cdot\operatorname{tg}(p-q)$$ (T-56)

57) $$\frac{\cot \mathrm{q}-\cot \mathrm{p}}{\operatorname{tg} q+\cot p}=\cot \mathrm{q}\cdot\operatorname{tg}(\mathrm{p}-\mathrm{q})$$ (T-57)

58) $$1+\operatorname{tg} p\cdot\operatorname{tg} q=\frac{\cos(p-q)}{\cos p\cdot\cos q};\quad 1-\operatorname{tg} p\cdot\operatorname{tg} q=\frac{\cos(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$$ (T-58)

59) $$\sin(p+q)\cdot\sin(p-q)=\sin^2 p-\sin^2 q=\frac{1}{2}\cos 2q-\frac{1}{2}cos2p$$ (T-59)

60) $$\cos(p+q)[\cdot]\cos(p-q)=\cos^2 p-\sin^2 q=\frac{1}{2}\cos 2q-\frac{1}{2}\sin 2p$$ (T-60)

61) $$\sin(p+q)[\cdot]\cos(p-q)=\frac{1}{2}\sin 2p+\frac{1}{2}\sin 2q$$ (T-61)

62) $$\sin(p-q)[\cdot]\cos(p+q)=\frac{1}{2}\sin 2p-\frac{1}{2}\sin 2q$$ (T-62)

$$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = (m)_0 - (m)_2 \operatorname{tang}^2 u + (m)_4 \operatorname{tg}^4 u - (m)_6 \operatorname{tg}^6 u + \cdots \qquad \text{(T-63)}$$

$$\frac{\sin mu}{\sin^m u} = (m)_1 \operatorname{tg} u - (m)_3 \operatorname{tg}^3 u + (m)_5 \operatorname{tg}^5 u - \cdots \qquad \text{(T-64)}$$

Kettenbrüche

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}} = K(q, q_1, \ldots q_n) \qquad \text{(K-1)}$$

$$\frac{b}{a} = K_1 = \frac{1}{K} = K_1(0, q, q_1 \ldots q_n) \qquad \text{(K-2)}$$

1.) Jeder gem. Bruch ist in einen endlichen Kett.Br. entwickelbar

2.) Jeder K.B. mit endl. Zahl von Theilnehmern ist in einen gewöhnlichen Bruch verwandelbar
K_0, K_1, $K_2 \ldots$ Näherungsbrüche bis zur $0^{\underline{\text{ten}}}$, $1^{\underline{\text{ten}}}$, $2^{\underline{\text{ten}}} \ldots$ Stelle

3.) $K_s = \dfrac{q_s \cdot Z_{s-1} + Z_{s-2}}{q_s N_{s-1} + N_{s-2}} = \dfrac{Z_s}{N_s}$

$$Z_s = q_s Z_{s-1} + Z_{s-2}; \quad N_s = q_s N_{s-1} + N_{s-2} \qquad \text{(K-3)}$$

4.) $N_s \cdot Z_{s-1} - Z_s [\cdot] N_{s-1} = (-1)^s$ (K-4)

5.) $K_{s+1} - K_s = \dfrac{(-1)^s}{N_s \cdot N_{s+1}}; \quad |K_{s+1} - K_s| = \dfrac{1}{N_s \cdot N_{s+1}}$ (K-5)

6.) $K_0 < K_1 \quad , K_2 < K_3 \quad , K_4 < K_5 \ldots K_s < K_{s+1}$ s gerade (K-6)

7.) $K_1 > K_2, K_3 > K_4 \ldots K_s > K_{s+1} \cdots$ s ungerade (K-7)

8.) $K_0 < K_2 < K_4 < K_6 \cdots$ (K-8)
$K_1 > K_3 > K_5 > K_7 > \cdots$

od. $\left.\begin{array}{l} K_0 < K_2 < K_1 \\ K_2 < K_3 < K_4 \\ K_4 < K_5 < K_3 \end{array}\right\}$ Jeder Näherungsbr. liegt zwischen seinen <u>vorausgehenden</u> Näherungsbrüchen

Mathematische Skizze

Fehler $|K_s - K| = f < \dfrac{1}{N_s^2}$ (K-9)

6

Grenzwerte

Summe: $\lim(\Phi_n \pm \Psi_n) = \Phi \pm \Psi = \lim\Phi_n \pm \lim\Psi_n$ (G-1)

Product: $\lim\left(\Phi_n \cdot \Psi_n\right) = \Phi \cdot \Psi = \lim\Phi_n \cdot \lim\Psi_n$ (G-2)

Quotient: $\lim\left(\frac{\Phi_n}{\Psi_n}\right) = \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\lim\Phi_n}{\lim\Psi_n}$ (G-3)

$\lim c \cdot \Phi_n = c \cdot \lim\Phi_n$ (G-4)

$\lim\log_b \Phi_n = \log_b \lim\Phi_n$ (G-5)

$\lim\Phi_n^{\Psi_n} = \lim\Phi_n{}^{\lim\Psi_n}$ (G-6)

Wenn: $\lim\frac{\Phi_n}{\lim\Psi_n} = a$ So: $\lim\frac{\Psi_n}{\Phi_n} = \frac{1}{a}$ (G-7)

Allgemein:

$y = f(\varphi(x)) \quad | \quad y = f(z), z = \varphi(x)$

$\lim\limits_{x\to x_1} \varphi(x) = \varphi(x_1) = z_1$ wenn $\varphi(x)$ an Stelle $x = x_1$ stetig (G-8)

$\lim\limits_{z=z_1} f(z) = f(z_1)$ wenn $f(z)$ an der Stelle $z = z_1$ stetig

$$= f\left(\lim_{x=x_1}\varphi(x)\right)$$ (G-9)

$\lim\limits_{x=x_1} f\left(\varphi(x)\right) = f\left(\lim\limits_{x=x_1}\varphi(x)\right)$ der lim. einer Function = Function des lim (G-10)

Bestimmung

$$\lim_{x=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$ (G-11)

$$\lim_{x=\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1$$ (G-12)

$$\lim_{x=0}\left(1+ax\right)^{1/x}=e^{a} \qquad \lim_{x=0}\frac{b^{x}-1}{x}=\ln b \tag{G-13}$$

$$\lim_{x=0}\frac{\log_{b}\left(1+ax\right)}{x}=\frac{a}{\ln b} \qquad \lim_{x=0}\frac{e^{x}-1}{x}=1 \tag{G-13}$$

$$\lim_{x=0}\frac{\log_{b}\left(1+x\right)}{x}=\frac{1}{\ln b} \qquad \lim_{x=0}\frac{x}{e^{x}-1}=1 \tag{G-14}$$

$$\lim_{x=0}\frac{x}{\log_{b}\left(1+x\right)}=\ln b \qquad \lim_{x=0}\frac{\left(1+x\right)^{m}-1}{x}=m \tag{G-15}$$

$$\lim_{x=0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1 \qquad \lim_{n=\infty}\frac{k^{n}}{n!}=0 \tag{G-16}$$

Grenzwerte

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{\delta=0} \frac{(1+\delta)^{\mu} - 1}{\delta} = \mu \tag{G-17}$$

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \tag{G-18}$$

8

Differentialquotienten

$$y = x^{\alpha} \quad : \quad \frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \qquad\qquad y = \sin x \quad : \quad y' = \cos x \tag{D-1}$$

$$y = b^{x} \quad : \quad \frac{dy}{dx} = b^{x} \ln b \qquad\qquad y = \cos x \quad : \quad y' = -\sin x \tag{D-2}$$

$$y = e^{x} : y' = e^{x} \qquad\qquad y = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad : \quad y' = \sinh x \tag{D-3}$$

$$y = \log_{b} x \quad : \quad y' = \frac{\log_{b} e}{x} \qquad y = \sinh x \quad : \quad y' = \cosh x \tag{D-4}$$

$$y = \ln x \quad : \quad y' = \frac{1}{x} \tag{D-5}$$

$$\text{Product: } \frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v[\cdot]\frac{du}{dx} \tag{D-6}$$

$$\text{Quotient: } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v[\cdot]\mathrm{d}u - u[\cdot]\mathrm{d}v}{v^{2}} \tag{D-7}$$

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = 1 + \operatorname{tg}^{2} x \tag{D-8}$$

$$\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\left(1 + \cot^{2} x\right) \tag{D-9}$$

$$\frac{d \sec x}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x \tag{D-10}$$

$$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\cot x \cdot \operatorname{cosec} \cdot x \tag{D-11}$$

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}} \tag{D-12}$$

$$\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}} \tag{D-13}$$

$$\frac{d\,\mathrm{arctg}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \tag{D-14}$$

$$\frac{d\,\mathrm{arcot}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \tag{D-15}$$

$$\frac{d\,\mathrm{arcsec}\,x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \tag{D-16}$$

$$\frac{d\,\mathrm{arcosec}\,x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \tag{D-17}$$

Differentialquotienten

Allgemein: Bogenfunctionen

1. $\frac{d\arcsin\varphi(x)}{dx}=\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}$ (D-18)

2. $\frac{d\arccos\varphi(x)}{dx}=\frac{-\varphi'(x)}{\sqrt{1+\varphi(x)^2}}$ (D-19)

3. $\frac{d\,\mathrm{arctg}\,\varphi(x)}{dx}=\frac{\varphi'(x)}{1+(\varphi(x))^2}$ (D-20)

4. $\frac{d\,\mathrm{arccot}\cdot\varphi(x)}{dx}=-\frac{\varphi'(x)}{1+(\varphi(x))^2}$ (D-21)

5. $\frac{d\,\mathrm{arcsec}\,\varphi(x)}{dx}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\sqrt{(\varphi(x))^2-1}}$ (D-22)

6. $\frac{d\,\mathrm{arcosec}\,\varphi(x)}{dx}=-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\sqrt{[\varphi(x)]^2-1}}$ (D-23)

Logarithm. Function: $\frac{d}{dx}\lg\varphi(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ (D-24)

Funct. von Funct. $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ z. B.

$$d\left[\frac{1}{b}\ln(a+bx)\right]=\frac{dx}{a+bx} \qquad d\left[\frac{2\sqrt{a+bx}}{b}\right]=\frac{dx}{\sqrt{a+bx}} \qquad \text{(D-25)}$$

$$d\left[-\frac{1}{b(a+bx)}\right]=\frac{dx}{(a+bx)^2} \qquad d\left[\frac{\ln\left(\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)}{\beta}\right]=\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$$

(D-26)

$$d\left[\frac{1}{\alpha\cdot\beta}\mathrm{arctg}\frac{\beta x}{\alpha}\right]=\frac{dx}{\alpha^2+\beta^2x^2} \qquad d\left[\frac{1}{\beta}\arcsin\frac{\beta x}{\alpha}\right]=\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}} \qquad \text{(D-27)}$$

$$d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\ln\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)\right]=\frac{dx}{\alpha^2-\beta^2x^2} \qquad d\left[\frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}\right]=\frac{xdx}{\sqrt{a+bx^2}} \tag{D-28}$$

$$d\left[\frac{1}{2b}\ln\left(a+bx^2\right)\right]=\frac{xdx}{a+bx^2} \tag{D-29}$$

$$d\left[\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right]=\frac{dx}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}} \qquad d\left[-\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}}\right]=\frac{xdx}{\sqrt{\left(a+bx^2\right)^3}} \tag{D-30}$$

$$d\left[x\ln x-x\right]=\ln x dx \qquad d\left[-\ln\cos u\right]=\operatorname{tg} u du \tag{D-31}$$

$$d\left[\ln\sin u\right]=\cot u du \qquad d\left[\frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta\operatorname{tg} u}{\alpha}\right)\right]=\frac{du}{\alpha^2\cos^2 u+\beta^2\sin^2 u} \tag{D-32}$$

$$d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\ln\left(\frac{\alpha+\beta\operatorname{tg} u}{\alpha-\beta\operatorname{tg} u}\right)\right]=\frac{du}{\alpha^2\cos^2 u-\beta^2\sin^2 u} \tag{D-33}$$

Differentialquotienten

1.) $z = f(xy)$; $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y}$ (D-34)

2.) $u = F(xyz)$ $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$ (D-35)

2a) oder $y = f(u,v)$ beide abhängig von x (D-36)

so $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u' + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot v'$ woraus obiges folgt

3.) $y = f\left[u(z), v(z_1)\right] \dots z(x), z_1(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dx} \qquad \text{(D-37)}$$

Implicite Functionen

$$F(x,y) = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \text{(D-38)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \qquad \text{(D-39)}$$

Höhere Diff. Quot.

Es sei $D(y) = \frac{dy}{dx} : D(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}, \quad D^n(x^{\mu}) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-[n-1])x^{\mu-n}$ (D-40)

$$D^n (a + bx)^{\mu} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-[n-1]) b^n (a+bx)^{\mu-n} \qquad \text{(D-41)}$$

$$D^n \frac{1}{a+bx} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n \cdot b^n}{(a+bx)^{n+1}} \qquad \text{(D-42)}$$

$D^n \log x = M \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-1)}{x^n}$ M = Modul des log. Systems (D-43)

$$D^n \log(a+b\,x) = M\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\ldots(n-1)\,b^n}{(a+b\,x)^n} \qquad \text{(D-44)}$$

$$D^n a^x = a^x (\ln a)^n \qquad \text{(D-45)}$$

$$D^n e^{\beta x} = \beta^n e^{\beta x} \qquad \text{(D-46)}$$

$$D^n \sin x = \sin\left(\frac{n}{2}\pi + x\right) \qquad \text{(D-47)}$$

$$D^n \cos x = \cos\left(\frac{n}{2}\pi + x\right) \qquad \text{(D-48)}$$

<u>Höhere Diff. Quot. zusammengesetzter Funct.</u>

$$D^n(a\,u + b\,v) = a\,D^n u + b\,D^n v \qquad \text{(D-49)}$$

$$D^n(u\cdot v) = (n_0)u\cdot D^n v + (n)_1\,D\,u\cdot D^{n-1}v + (n)_2\,D^2 u\cdot D^{n-2}v + \ldots \qquad \text{(D-50)}$$

z. B. $D^n \frac{\ln x}{x} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \ldots n}{x^{n+1}} \left[\ln x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right) \right]$ (D-51)

$$D^n \sec x = \left[(n)_1 \sec x^{(n-1)} - (n)_3 \sec x^{(n-3)} + (n)_5 \sec x^{(n-5)} - \cdots \right] \operatorname{tg} x + (n)_2 \sec x^{(n-2)} - (n)_4 \sec x^{(n-4)} + (n)_6 \sec x^{(n-6)} - \cdots \qquad \text{(D-52)}$$

$$D^n \operatorname{tg} x = \frac{\sin\left(\frac{1}{2} n\pi + x \right)}{\cos x} + \left[(n_1) \operatorname{tg} x^{(n-1)} - (n_3) \operatorname{tg} x^{(n-3)} + \cdots \right] \operatorname{tg} x + (n_2) \operatorname{tg} x^{(n-2)} - (n_4) \operatorname{tg} x^{(n-4)} + \cdots \qquad \text{(D-53)}$$

$$D^{n+2} \arcsin x = \frac{(2n+1)\, x \arcsin x^{(n+1)} + n^2 \arcsin x^{(n)}}{1 - x^2} \qquad \text{(D-54)}$$

oder

$$D^{n+1} \arcsin x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n (1-x)^n \sqrt{1-x^2}} \left\{ 1 - \frac{1 \cdot (n)_1 \cdot (1-x)}{2n - 1 \cdot (1+x} + \frac{1 \cdot 3 \cdot (n)_2}{(2n-1)(2n-3)} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 (n)_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^3 + \cdots \right\} \qquad \text{(D-55)}$$

$$D^{n+1} \operatorname{arctg} x = -\frac{2nx \operatorname{arctg} x^{(n)} + n(n-1) \operatorname{arctg} x^{(n-1)}}{1 + x^2} \qquad \text{(D-56)}$$

oder

$$D^{n+1} \operatorname{arctg} x = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{\sqrt{(1+x^2)^n}} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) \qquad \text{(D-57)}$$

<u>Höhere partielle Diff. Quot.</u>

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} dy^2 \qquad \text{(D-58)}$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 \qquad \text{(D-59)}$$

$$d^n z = (n)_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + (n)_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + (n)_2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \cdots \qquad (\text{D-60})_1$$

$$= \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy \right)^n \partial^n z \ \text{ symbolisch} \qquad (\text{D-60})_2$$

Variable:

$$d^n \mu = \left(\frac{1}{\partial x} + \frac{1}{\partial y} + \frac{1}{\partial z} \right)^n \partial^n \mu \quad n \ \text{Variable /. nächste Seite} \qquad (\text{D-61})$$

<u>Höhere Diff.Quot. impliciter Functionen</u>

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \qquad (\text{D-62})$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{3 \partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + \\ &\quad + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \end{aligned} \qquad (\text{D-63})$$

$\frac{dy}{dx}$ nach früher $\quad \frac{d^2 y}{dx^2}$ unter Einsetzung dieses berechnen u.<nd.> s<iehe> o<ben> schrittweise weiter

Differential Quotienten.

Differentiale von Reihen: siehe daselbst!

Höhere partielle Differentialquotienten

n unabhängige Veränderliche:

$y = f(x_1 \ldots x_n)$

$$: d^2 y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \right)^2 \qquad \text{(D-64)}$$

$$d^n y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \right)^n \qquad \text{(D-65)}$$

2 abhängige Variable:

$z = f(xy), \quad y = \varphi(x) \quad \ldots 1.)$

$x = \psi(\lambda), \quad y = \chi(\lambda) \ldots 2.)$

$$: dy = \varphi'(x) dx = \chi'(\lambda) d\lambda; \quad dx = \psi'(\lambda) \cdot d\lambda, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\chi'(\lambda)}{\psi'(\lambda)} \qquad \text{(D-66)}$$

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d(dx) + \frac{\partial z}{\partial y} d(dy) \qquad \text{(D-67)}$$

1.) $d(dx) = 0$ (D-68)

$d(dy) = \varphi''(x) dx^2$ (D-69)

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^2 + \varphi''(x) dx^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \qquad \text{(D-70)}$$

2.) $d(dx) = d^2 x = \varphi''(\lambda) d\lambda^2$ (D-71)

$d(dy) = d^2 y = \chi''(\lambda) d\lambda^2$ (D-72)

$$d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y \qquad \text{(D-73)}$$

$$d^3z = (dz)^3 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}d\left(dx^2\right) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}d\left(dxdy\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}d\left(dy^2\right) \qquad \text{(D-74)}$$

wobei: $d\left(dx^2\right) = 2dx \cdot d^2x = 2\psi'(\lambda)\psi''(\lambda)d\lambda^3$ (D-75)

<u>Ausnahme:</u> Ist $x = \psi(\lambda) = a\lambda + b$ (D-76)

$y = \chi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$ so ist (D-77)

$d^3z = (dz)^3$ da $\psi' = a$, ψ'' u.<und>f.<folgende> = 0 (D-78)

$\chi' = \alpha$ χ'' “ “ = 0 (D-79)

Diff. mehrerer Functionen einer Veränderlichen.

$$y = f\left(x_1 \ldots\ldots x_n\right), \qquad x_1 = f_1\left(x\right) \ldots\ldots x_n = f_n\left(x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n' \tag{D-80}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'' + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'' \tag{D-81}$$

$+F\left(xy\right) = 0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^3} \tag{D-82}$$

$F\left(xyz\right) = 0$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = q$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} p + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} p^2}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \tag{D-83}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} q + \dfrac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} p + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} p \cdot q}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \tag{D-84}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} q + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} q^2}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \tag{D-85}$$

Einführung neuer Veränderlicher.

$$\left.\begin{array}{r} y = f(x) \\ F(xy) = 0 \end{array}\right\} x = \psi(t) \text{ gesetzt. Sodann: } y = f\left(\psi\left(t\right)\right) = \chi\left(t\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\chi'}{\psi'} \tag{D-86}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi'\chi'' - \chi'\psi''}{\psi'^3} \tag{D-87}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{\psi'} \frac{d\left(\frac{\psi'\chi'' - \chi'\psi''}{\psi'^3}\right)}{dt} \tag{D-88}$$

16

Tangenten u. Normalen

$y = f(x)$ geg. Curve

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \quad \dots \text{Tg.} \qquad \text{(TN-1)}$$

$$\eta - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(\xi - x) \quad \text{Norm.} \qquad \text{(TN-2)}$$

$F(xy) = 0$ geg. Curve

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0 \quad \text{Tang.} \qquad \text{(TN-3)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0 \quad \text{Norm.} \qquad \text{(TN-4)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} \quad \text{geg. Curve}$$

$$\varphi'(t)(\eta - y) - \psi'(t)(\xi - x) = 0 \quad \text{Tang.} \qquad \text{(TN-5)}$$

$$\psi'(t)(\eta - y) + \varphi'(t)(\xi - x) = 0 \quad \text{Norm.} \qquad \text{(TN-6)}$$